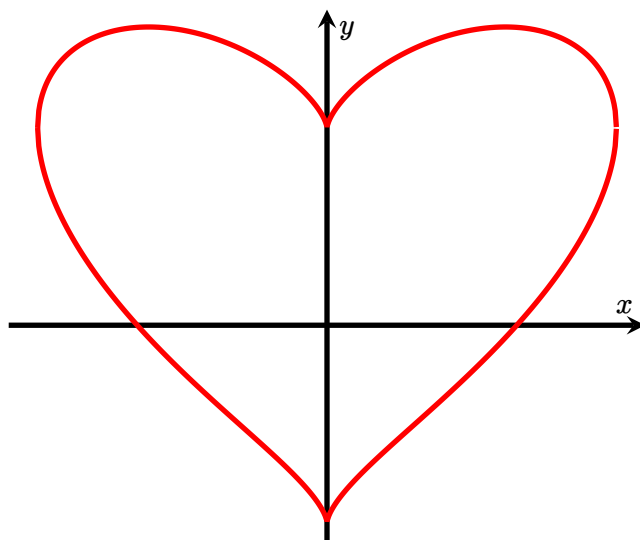


Matematika

Dominik Doležel & Honza Romanovský

a kolektiv



Graf $x^2 + \left[y - x^{\frac{2}{3}}\right]^2 = 1$

Obsah

Předmluva	1
1 Základní pojmy z teorie množin	2
2 Výroková logika	5
3 Dělitelnost přirozených čísel	8
4 Planimetrie	14
5 Kartézský součin, binární relace, zobrazení	29
6 Funkce a jejich základní vlastnosti	31
7 Polynomy, kořeny polynomů	36
8 Polynomická funkce	42
9 Racionální lomená funkce	46
10 Mocniny, mocninná funkce	49
11 Exponenciální funkce	52
12 Logaritmus, logaritmická funkce	54
13 Funkce sinus, kosinus, arkussinus, arkuskosinus	57
14 Funkce tangens, kotangens, arkustangens, arkuskotangens	59
15 Vztahy mezi goniometrickými funkcemi	61
16 Kombinatorika	65
17 Pravděpodobnost	72
18 Stereometrie – polohové vlastnosti	76

19 Stereometrie – metrické vlastnosti	80
20 Vektorové prostory	85
21 Analytická geometrie lineárních útvarů – polohové vlastnosti	92
22 Analytická geometrie lineárních útvarů – metrické vlastnosti	97
23 Komplexní čísla	101
24 Posloupnosti	105
25 Limita funkce	113
26 Derivace funkce	118
27 Průběh funkce	123
28 Neurčitý integrál	126
29 Určitý integrál	135
30 Kuželosečky	141
31 Nezařazené vykřičníkové příklady	146
31.1 Algebraické výrazy	146
31.2 Rovnice a nerovnice, matice	147
31.3 Důkazy	151
31.4 Kombinatorická geometrie	152
A Goniometrické funkce	154
B Integrály	158
C Kuželosečky	161

Předmluva

Na počátku všeho řekl Bůh:

„Nechť je dán polynom.“

Byl spokojen se svým výtvorem, ale přišlo mu, že všechno vědění je vlastně bezúčelné, nemá-li ho kdo studovat. A tak stvořil člověka...

Vážené čtenářstvo, v rukou držíte soubor všech základních definic, vět a příkladů středoškolské matematiky tak, jak byla probírána na matematickém gymnáziu v první polovině dvacátých let jednadvacátého století. Seznam je sestaven podle požadavků k maturitní zkoušce.

Všichni, již se na psaní a úpravě podíleli, přejí příjemné čtení. A nezapomeňte, všechno to znáte ze základní školy!

Věnováno RNDr. Pavlu Boucníkovi

Kapitola 1

Základní pojmy z teorie množin

Definice 1. **Množina** je souhrn objektů, chápaný jako celek. Tyto objekty nazýváme prvky množiny.

Poznámka 1. Množina může být konečná, nekonečná nebo prázdná. Množinu lze zadat výčtem prvků nebo pomocí charakteristické vlastnosti (např. $\{2k, k \in \mathbb{N}\}$).

Definice 2. **Podmnožina** množiny A je taková množina B , že všechny její prvky patří do množiny A . Zapisujeme $B \subseteq A$.

Poznámka 2. Každá neprázdná množina má dvě **nevlastní podmnožiny**: množinu prázdnou a sebe sama. Všechny ostatní její podmnožiny nazýváme **vlastní**.

Definice 3. Množiny A a B se rovnají právě tehdy, když A je podmnožinou B a zároveň B je podmnožinou A .

Definice 4. Necht $A \subseteq B$ a $B \neq \emptyset$. Množinu všech prvků množiny B , které nepatří do množiny A , nazýváme **doplňěk** (komplement) množiny A v množině B . Zapisujeme A'_B .

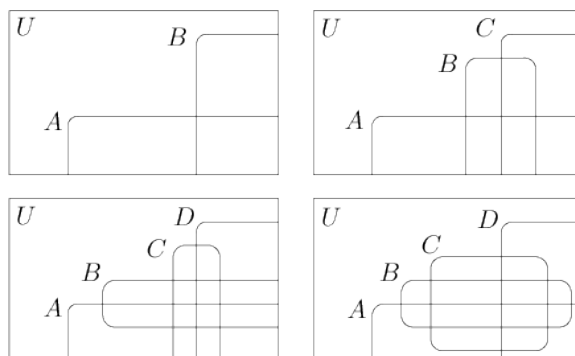
Definice 5. Necht A, B jsou dvě množiny. Jejich **sjednocení** nazveme takovou množinu, která obsahuje ty prvky, které patří alespoň do jedné z množin A, B . Zapisujeme $A \cup B$.

Definice 6. Necht A, B jsou dvě množiny. Jejich **průnikem** nazveme takovou množinu, která obsahuje ty prvky, které patří zároveň do obou těchto množin A, B . Zapisujeme $A \cap B$.

Definice 7. Dvě množiny jsou **disjunktní**, pokud nemají žádný společný prvek, tedy pokud je jejich průnikem prázdná množina.

Definice 8. Necht A, B jsou dvě množiny. **Rozdíl** množin je množina, která obsahuje všechny prvky množiny A s výjimkou těch, jež jsou zároveň prvky množiny B . Zapisujeme $A \setminus B$, někdy též $A - B$.

Definice 9. Vennův diagram je grafické schematické znázornění všech možných vztahů (sjednocení, průnik, rozdíl, doplněk) několika podmnožin univerzální množiny, jež znázorňujeme pomocí uzavřených čar.



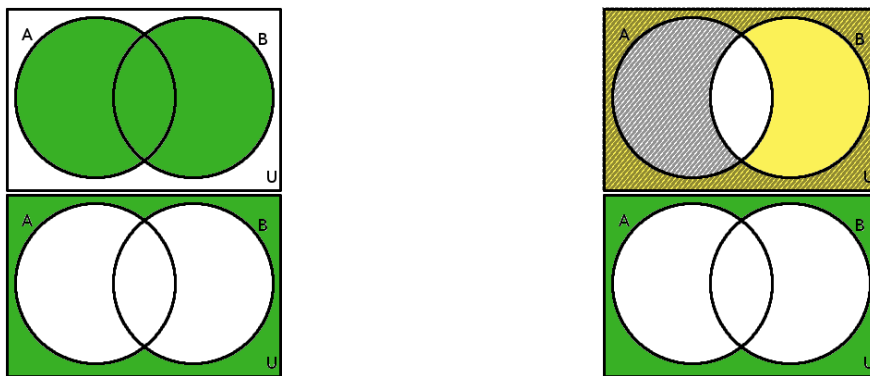
Obrázek 1 – Vennovy diagramy pro dvě, tři a čtyři množiny

Věta 1 (De Morganova pravidla). *Nechť A, B jsou dvě množiny, X' značí doplněk množiny X . Potom platí*

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Důkaz. Důkaz prvního vztahu:



Důkaz druhého analogicky. □

Poznámka 3 (Číselné množiny). Rozlišujeme následující základní číselné množiny:

- $\mathbb{N}$: přirozená čísla $(1, 2, 3, \dots)$,
- $\mathbb{Z}$: celá čísla $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$,
- $\mathbb{Q}$: racionální čísla $(\frac{3}{5}, 0, \bar{3})$,
- $\mathbb{R}$: reálná čísla (e, π) ,
- $\mathbb{C}$: komplexní čísla $(3 + 2i)$.

Iracionální čísla ($\mathbb{I}$) jsou doplněk racionálních v $\mathbb{R}$.

Definice 10. Přírozená čísla jsou čísla, která vyjadřují počty prvků množin.

Definice 11. Celá čísla jsou čísla, která vyjadřují počty prvků množin, čísla k nim opačná a číslo 0.

Definice 12. Racionálním číslem nazveme takové číslo $a = \frac{k}{l}$, kde $k, l \in \mathbb{Z}$ a k, l jsou nesoudělná.

Poznámka 4. Čísla zapisujeme pomocí dekadického pozičního systému, a to pomocí číslic 0–9 a chápeme je takto:

$$4503,6 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}.$$

Zápis se skládá z celé části, desetinné čárky a desetinného rozvoje. Každé racionální číslo je v desítkové soustavě vyjádřeno buď ukončeným desetinným rozvojem nebo periodickým rozvojem. Iracionální číslo je vyjádřeno neukončeným neperiodickým rozvojem.

Definice 13. Reálnými čísly nazýváme všechna čísla, která jsou velikostmi úseček.

Definice 14. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$. Pak množiny takových $x \in \mathbb{R}$, že $a \leq x \leq b$ (resp. $a < x < b$, resp. $a < x$, resp. $a \leq x < b$ atd.) nazýváme uzavřeným (resp. otevřeným, resp. neomezeným zleva otevřeným, resp. zprava uzavřeným, zleva otevřeným atd.) **intervalem**. Zapisujeme $\langle a, b \rangle$ (resp. (a, b) , resp. (a, ∞) , resp. $\langle a, b \rangle$).

Definice 15. Periodický rozvoj čísla je desetinný rozvoj, u kterého se za desetinnou čárkou donekonečna opakuje (periodicky opakuje) táž číslice nebo skupina číslic. Opakující se číslice nebo skupina opakujících se číslic se nazývá perioda. Zapisují se tak, že se nad opakující se skupinou napíše pruh:

$$0,333\dots = 0,\overline{3}.$$

Příklad 1. Zapište zlomkem v základním tvaru číslo $0,\overline{14}$.

Řešení. Budeme postupně upravovat:

$$\begin{aligned} a &= 0,\overline{14} \\ 100a &= 14,\overline{14} \\ 99a &= 14 \\ a &= \frac{14}{99}. \end{aligned}$$

Poznámka 5. Pro definici komplexních čísel viz definici 238.

Kapitola 2

Výroková logika

Definice 16. Výrokem nazýváme každou oznamovací větu, která je buď pravdivá, nebo nepravdivá. **Pravdivostní hodnotou** výroku rozumíme jeho pravdivost/nepravdivost.

Definice 17. Negací výroku V nazýváme výrok V' , který má opačnou pravdivostní hodnotu než výrok V .

Poznámka 6. Kvantifikované výroky jsou výroky, které uvádějí počet objektů. Pro to lze použít

- obecný kvantifikátor $\forall$ (pro všechny / pro každý platí),
- existenční kvantifikátor $\exists$ (existuje alespoň jeden, že pro něj platí) a
- zesílený existenční kvantifikátor $\exists!$ (existuje právě jeden, že pro něj platí).

Definice 18. Složeným výrokem rozumíme více výroků spojených logickými spojkami:

název	zápis	význam
negace	X'	není pravda, že X
konjunkce	$X \wedge Y$	X a Y platí současně
alternativa	$X \vee Y$	platí alespoň jedno z X, Y
implikace	$X \Rightarrow Y$	jestliže X , pak Y
ekvivalence	$X \Longleftrightarrow Y$	X platí právě tehdy, když platí Y

Poznámka 7. Pravdivostní hodnoty výrokových formulí s logickou spojkou:

X	Y	X'	Y'	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	$X \Longleftrightarrow Y$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

Definice 19. Zápisy sestavené ze značek, výrokových proměnných, závorek a logických spojek nazýváme **výrokové formule**.

Definice 20. Výroková formule, která nabývá pravdivostní hodnoty 1 bez ohledu na pravdivostní hodnoty elementárních výroků, se nazývá **tautologie**.

Příklad 2. Napište tabulku pravdivostních hodnot výrokové formule $A \wedge Y \implies (X \vee Y)$ a určete, zda je tautologií.

Řešení. Napíšeme tabulku:

A	X	Y	$A \wedge Y$	$X \vee Y$	$A \wedge Y \implies (X \vee Y)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

Vidíme, že výroková formule je tautologií.

Věta 2. Pro každé dva výroky X, Y platí:

- i. $(X \vee Y)' = X' \wedge Y'$,
- ii. $(X \wedge Y)' = X' \vee Y'$,
- iii. $(X \implies Y)' = X \wedge Y'$ a
- iv. $(X \iff Y)' = (X \wedge Y') \vee (X' \wedge Y)$.

Definice 21. Necht $X \implies Y$ je implikace. Pak

- i. implikaci $Y \implies X$ nazýváme **obrácením** a
- ii. implikaci $Y' \implies X'$ nazýváme **obměnou**

původní implikace.

Věta 3. Implikace a její obměna mají touž pravdivostní hodnotu.

Poznámka 8. Implikace a její obrácení nemusí vždy mít touž pravdivostní hodnotu.

Definice 22. **Výroková forma** je tvrzení obsahující proměnné. Po dosazení konstant za proměnné dostáváme výrok.

Příklad 3. V dílně jsou tři stroje A, B, C , které pracují podle těchto pravidel:

- pracuje-li A , pracuje i B ,

- pracuje alespoň jeden ze strojů B, C ,
- nepracuje-li stroj A , nepracuje ani C .

Určete všechny možnosti práce strojů.

Řešení. Výroky lze zapsat jako

- $A \implies B$,
- $B \vee C$,
- $A' \implies C'$.

Sestavme tabulku pravdivostních hodnot:

A	B	C	$A \implies B$	$B \vee C$	$A' \implies C'$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Zjišťujeme, že vyhovují možnosti, kdy pracují stroje A, B, C ; A, B ; nebo jen stroj B .

Příklad 4. Zapište pomocí symbolů následující výrokové formy a jejich negace:

a. Pro každé reálné číslo b platí: $(b+1)^2 = b^2 + 2b + 1$.

b. $B(x)$: Existuje takové reálné číslo m , že platí $(m+1)^3 = m^3 + 1$.

Řešení. a. $\forall b \in \mathbb{R} : (b+1)^2 = b^2 + 2b + 1$, negace: $\exists b \in \mathbb{R} : (b+1)^2 \neq b^2 + 2b + 1$.

b. $B(x) : \exists m \in \mathbb{R} : (m+1)^3 = m^3 + 1$, negace: $B'(x) : \forall m \in \mathbb{R} : (m+1)^3 \neq m^3 + 1$.

Příklad 5. Vytvořte obměnu, obrácení a negaci výroku

„Kvadrát přirozeného sudého čísla je sudé číslo.“

Řešení. Přepíšeme symbolicky: $\forall n \in \mathbb{N} : n = 2k \implies n^2 = 2l; k, l \in \mathbb{N}$.

- obměna: $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 = 2l + 1 \implies n = 2k + 1; k, l \in \mathbb{N}$,
- obrácení: $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 = 2l \implies n = 2k; k, l \in \mathbb{N}$,
- negace: $\exists n \in \mathbb{N} : n = 2k \wedge n^2 = 2l + 1; k, l \in \mathbb{N}$.

Poznámka 9. Důležitému netriviálnímu a dostatečně obecnému výroku nebo výrokové formě s matematickým obsahem říkáme **věta**.

Kapitola 3

Dělitelnost přirozených čísel

Definice 23. Necht $a, b \in \mathbb{Z}$. Číslo a **dělí** číslo b , jestliže $\exists c \in \mathbb{Z} : b = ac$. Zapisujeme $a \mid b$. V opačném případě říkáme, že číslo a **nedělí** číslo b a zapisujeme $a \nmid b$.

Definice 24. Necht $a \in \mathbb{R}$. Číslo $|a|$ takové, že

$$i. a \geq 0 \implies |a| = a,$$

$$ii. a < 0 \implies |a| = -a$$

nazýváme **absolutní hodnotou** čísla a .

Věta 4 (O dělení se zbytkem). Necht $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$. Pak $\exists! q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}_0 :$

$$a = bq + r, 0 \leq r < b.$$

Definice 25. Necht $a, b \in \mathbb{N}$. Pak c je **společným dělitelem** čísel a, b , jestliže $c \mid a \wedge c \mid b$.

Definice 26. $d \in \mathbb{N}$ je **největší společný dělitel** čísel $a, b \in \mathbb{N}$, jestliže jsou splněny zároveň obě podmínky:

$$i. d \mid a \wedge d \mid b \text{ a}$$

$$ii. \forall c \in \mathbb{N} : c \mid a \wedge c \mid b \implies c \mid d.$$

Takové číslo značíme $d = D(a, b)$, někdy taky jen (a, b) .

Definice 27 (Euklidův algoritmus). Necht jsou dána $a, b \in \mathbb{Z}$, z nichž alespoň jedno je nenulové. Pak mohou nastat dvě možnosti:

$$i. a = 0 \implies D(a, b) = b \text{ nebo } b = 0 \implies D(a, b) = a \text{ triviálně;}$$

$$ii. a \neq 0 \neq b.$$

Dále se zabýváme případem *ii*. Je-li to nutné, přejmenujme a, b tak, aby $|a| \geq |b|$. Provedme následující posloupnost dělení se zbytkem. Toto dělení ukončíme, až bude zbytek nulový. Vzhledem k nerovnosti na pravé straně tento nulový zbytek existuje.

$$\begin{array}{ll} a = b \cdot q_1 + r_1, & |r_1| < |b| \\ b = r_1 \cdot q_2 + r_2, & |r_2| < |r_1| \\ r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3, & |r_3| < |r_2| \\ \dots = \dots & \dots < \dots \\ r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n, & |r_n| < |r_{n-1}| \\ r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1}, & r_{n+1} = 0. \end{array}$$

Potom $D(a, b) = r_n$.

Příklad 6. Spočítejte největšího společného dělitele čísel 40902 a 24140.

Řešení. Euklidovým algoritmem: $u = 40902, w = 24140$:

u	w	$u = w \cdot q + r$
40902	24140	$40902 = 24140 \cdot 1 + 16762$
24140	16762	$24140 = 16762 \cdot 1 + 7378$
16762	7378	$16762 = 7378 \cdot 2 + 2006$
7378	2006	$7378 = 2006 \cdot 3 + 1360$
2006	1360	$2006 = 1360 \cdot 1 + 646$
1360	646	$1360 = 646 \cdot 2 + 68$
646	68	$646 = 68 \cdot 9 + 34$
68	34	$68 = 34 \cdot 2 + 0$
34	0	konec algoritmu

Je tedy $D(40902, 24140) = 34$.

Definice 28. Necht $a, b \in \mathbb{N}$. Tato čísla jsou **nesoudělná**, jestliže $D(a, b) = 1$. V opačném případě jsou **soudělná**.

Věta 5 (Fundamentální věta aritmetiky). Necht $a_1, a_2, b \in \mathbb{N}, b > 1$. Pak

$$b \mid a_1 a_2 \wedge D(a_1, b) = 1 \implies b \mid a_2.$$

Definice 29. Necht $a, b \in \mathbb{N}$. Pak c je **společným násobkem** čísel a, b , jestliže $a \mid c \wedge b \mid c$.

Definice 30. $n \in \mathbb{N}$ je **nejmenší společný násobek** čísel $a, b \in \mathbb{N}$, jestliže jsou splněny zároveň obě podmínky:

i. $a \mid n \wedge b \mid n$ a

ii. $\forall m \in \mathbb{N} : a \mid m \wedge b \mid m \implies n \mid m$.

Takové číslo značíme $n = n(a, b)$, někdy taky jen $[a, b]$.

Věta 6. $\forall a, b \in \mathbb{N} : ab = D(a, b) \cdot n(a, b)$.

Definice 31. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Má-li číslo n pouze triviální dělitele ($1 \mid n, n \mid n$), nazýváme jej **prvočíslem**. V opačném případě hovoříme o **čísle složeném**.

Věta 7. Každé přirozené složené číslo n má alespoň jednoho prvočíselného dělitele $p \leq \sqrt{n}$.

Věta 8. Prvočísel je nekonečně mnoho.

Důkaz. Postupujme sporem. Nechť je jich konečně mnoho. Pak součin všech těchto prvočísel je přirozené číslo. Přičteme-li k tomuto součinu 1, dostaneme číslo, které není dělitelné žádným prvočíslem (je dělitelné jen jedničkou a samo sebou), jedná se tedy o prvočíslo. To je ovšem spor s předpokladem, že prvočísel je konečně mnoho. $\square$

Věta 9 (Základní věta aritmetiky). Každé přirozené číslo $n > 1$ lze zapsat ve tvaru:

$$n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3} \cdot \dots \cdot p_r^{m_r},$$

kde $p_i, i \in \{1, 2, \dots, r\}$ jsou navzájem různá prvočísla, $m_i \in \mathbb{N}_0$. Toto vyjádření je jednoznačné až na pořadí činitelů a říkáme mu **rozklad čísla n na součin prvočinitelů**.

Věta 10 (Věta o iracionálnosti odmocnin). Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak platí: Pokud n není druhou mocninou přirozeného čísla, pak odmocnina z n je iracionální.

Věta 11. Pro všechna $a, b \in \mathbb{N}, D(a, b) = d$ existují $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ taková, že $a = dq_1, b = dq_2$, přičemž $D(q_1, q_2) = 1$.

Příklad 7. Najděte všechny dvojice přirozených čísel, jejichž součin je 864 a jejichž největší společný dělitel je 6.

Řešení. Označme hledaná čísla a, b a $D(a, b) = d$. Pak podle věty 11 existují $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ taková, že

$$\begin{aligned} a &= dq_1, \\ b &= dq_2, \\ D(q_1, q_2) &= 1. \end{aligned}$$

Potom $864 = ab = d^2 q_1 q_2 = 36 q_1 q_2$, takže $q_1 q_2 = 24$. Zapišme si všechny tyto možnosti do tabulky:

q_1	q_2
1	24
2	12
3	8
4	6

Jsou tedy čtyři možnosti, ovšem nesmíme zapomenout na podmínku $D(q_1, q_2) = 1$. Vyhovují tedy jen možnosti 1, 24 a 3, 8. Pak $a = 6 \cdot 1 = 6$, $b = 6 \cdot 24 = 144$ nebo $a = 6 \cdot 3 = 18$, $b = 6 \cdot 8 = 48$ nebo v obráceném pořadí.

Příklad 8. Dokažte přímo a úvahou přes rozklad: $\forall a \in \mathbb{Z} : 3 \mid (a^3 - a)$.

Řešení. i. přímo: Mohou nastat dvě situace:

- a. $a = 3k, k \in \mathbb{Z}$, pak $3 \mid (a^3 - a)$ triviálně; nebo
- b. $a = 3k \pm 1$, pak $a^3 - a = 27k^3 \pm 3 \cdot 9k^2 \cdot 1 + 3 \cdot 3k \pm 1 - 3k \mp 1 = 3(9k^3 \pm 9k^2 + 3k - k)$, což je dělitelné třemi.

ii. úvahou přes rozklad: Rozložme $a^3 - a$:

$$a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a - 1)a(a + 1),$$

odkud vidíme, že tři musí dělit právě jednoho z činitelů, protože jsou to tři po sobě jdoucí čísla.

Příklad 9. Dokažte nepřímou a sporem: $\forall n \in \mathbb{N} : 5 \mid n^2 \implies 5 \mid n$.

Řešení. i. nepřímou: Dokazujeme obměnu $5 \nmid n \implies 5 \nmid n^2$, což je zřejmé.

ii. sporem: Předpokládejme, že výrok platí. Pak $n^2 = 5q, q \in \mathbb{Z}$. Protože je 5 prvočíslo a n je celé, musí i $5^2 \mid n^2$, jinak by odmocnina byla iracionální. Pak tedy $n^2 = 5^2 \cdot r^2$, a proto $n = 5r, r \in \mathbb{Z}$, což jsme chtěli dokázat.

Kritéria dělitelnosti

Věta 12. Nechť $n \in \mathbb{N}, n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$. Pak platí:

- i. $2 \mid n \iff 2 \mid a_0$,
- ii. $4 \mid n \iff 4 \mid (10a_1 + a_0)$,
- iii. $5 \mid n \iff 5 \mid a_0$,
- iv. $8 \mid n \iff 8 \mid (10^2 a_2 + 10a_1 + a_0)$ a
- v. $10 \mid n \iff a_0 = 0$.

Důkaz. Platí $n = 10(a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \dots + a_1) + a_0 = 10l + a_0, l \in \mathbb{N}$. □

Definice 32. Necht $n \in \mathbb{N}, n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$. Pak číslo

$$S(n) = \sum_{i=0}^k a_i$$

nazveme **ciferným součtem** čísla n .

Věta 13. Necht $n \in \mathbb{N}, n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$, $S(n)$ je ciferný součet čísla n . Pak platí:

i. $3 \mid n \iff 3 \mid S(n)$ a

ii. $9 \mid n \iff 9 \mid S(n)$.

Důkaz. Dokážeme položku ii. Důkaz té první proběhne obdobně.

$$\begin{aligned} 10^k &= (9 + 1)^k = 9l + 1, l \in \mathbb{N} \\ n &= a_k(9l_k + 1) + a_{k-1}(9l_{k-1} + 1) + \dots + a_1(9l_1 + 1) + a_0 \\ &= 9(a_k l_k + a_{k-1} l_{k-1} + \dots + a_1 l_1) + (a_k + a_{k-1} + \dots + a_0) \\ &= 9m + S(n), m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

1. $\implies : 9 \mid n \wedge 9 \mid 9m \implies 9 \mid S(n)$,

2. $\impliedby : 9 \mid S(n) \wedge 9 \mid 9m \implies 9 \mid n$. □

Věta 14. Necht $n \in \mathbb{N}, n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$. Pak platí

$$11 \mid n \iff 11 \mid (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^k a_k).$$

Věta 15. Necht $n \in \mathbb{N}, n = 10k + a_0, k \in \mathbb{N}$. Pak platí

i. $7 \mid n \iff 7 \mid (k + 5a_0)$,

ii. $13 \mid n \iff 13 \mid (k + 4a_0)$.

Důkaz. $n = 10k + a_0$

i. $b = k + 5a_0$

$$10b = 10k + 50a_0 = 10k + a_0 + 49a_0 = n + 49a_0$$

(a) $\implies : 7 \mid n \wedge 7 \mid 49a_0 \implies 7 \mid 10b \implies 7 \mid b$, neboť $D(7, 10) = 1$

(b) $\impliedby : 7 \mid b \implies 7 \mid 10b \wedge 7 \mid 49a_0 \implies 7 \mid n$

ii. $b = k + 4a_0$

$$10b = 10k + 40a_0 = 10k + a_0 + 39a_0 = n + 39a_0$$

(a) $\implies : 13 \mid n \wedge 13 \mid 39a_0 \implies 13 \mid 10b \implies 13 \mid b$, neboť $D(13, 10) = 1$

(b) $\impliedby : 13 \mid b \implies 13 \mid 10b \wedge 13 \mid 39a_0 \implies 13 \mid n$ □

Příklad 10. Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N} : 24 \mid (25^n + 23)$.

Řešení. Označme $V(n) = 25^n + 23$. Matematickou indukci:

1. $n = 1 : 24 \mid (25 + 23) = 48$, platí
2. Nechť $24 \mid V(n)$. Chceme dokázat, že $24 \mid V(n+1)$. Platí:

$$V(n+1) = 25^{n+1} + 23 = 25 \cdot (25^n + 23) - 25 \cdot 23 + 23 = 25V(n) - 23(25 - 1),$$

odkud vidíme, že $24 \mid V(n+1)$, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 11. Dokažte, že $\forall a \in \mathbb{Z} : 3 \nmid a \implies 3 \mid (a^2 - 1)$.

Řešení. Není-li a dělitelné třemi, pak $a = 3k \pm 1$. Potom

$$a^2 - 1 = 9k^2 \pm 2 \cdot 3k \cdot 1 + 1 - 1 = 3(3k^2 \pm 2k),$$

což je dělitelné třemi.

Příklad 12. Největší společný dělitel čísel a, b je 15 a jejich nejmenší společný násobek je 900. Určete čísla a, b .

Řešení. Označme jejich největšího společného dělitele jako d a jejich nejmenší společný násobek jako n . Pak existují nesoudělná $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ taková, že $a = dq_1$, $b = dq_2$. Užitím věty 11 dostaneme $dq_1q_2 = n$, tedy $q_1q_2 = 60$, přitom $D(q_1, q_2) = 1$. Zaznačíme si všechny možnosti do tabulky:

q_1	q_2
1	60
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10

Vyhovují možnosti 1 a 60, 3 a 20, 4 a 15 a 5 a 12. Odpovídající a, b už jednoduše dopočítáme. Nezpomeneme, že nezáleží na pořadí.

Věta 16 (Binomická věta). Nechť $x, y \in \mathbb{N}_0$. Pak

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Důsledek 1. Důsledkem věty 16 je následující fakt:

$$(a + b)^n = a^n + kb = la + b^n, \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Kapitola 4

Planimetrie

Poznámka 10. Bod, přímka a rovina jsou tzv. primitivními pojmy (základní), které nedefinujeme a vyslovujeme o nich nedokazatelná tvrzení (axiomy), které považujeme za platné. Budeme pracovat v rovině $\mathbb{E}_2$ (euklidovský prostor dimenze 2), což je základní množina, jejíž prvky jsou body. Množinu všech přímek značíme $\mathcal{P}$. V planimetrii dále pracujeme se základními vztahy (relacemi):

- „ležet na“ – **relace incidence**: bod leží na přímce, zapisujeme $A \in p$,
- „ležet mezi“ – **relace uspořádání**: bod leží mezi body, zapisujeme $X \mu AB$.

Axiom 1. Každými dvěma různými body prochází právě jedna přímka.

$$\forall A, B \in \mathbb{E}_2, A \neq B : \exists! p \in \mathcal{P} : A \in p \wedge B \in p.$$

Axiom 2. Na každé přímce leží alespoň dva různé body.

$$\forall p \in \mathcal{P} : \exists A, B \in \mathbb{E}_2 : A \neq B \wedge A \in p \wedge B \in p.$$

Axiom 3. Existují alespoň tři po dvou různé body, které neleží na jedné přímce.

$$\exists A, B, C \in \mathbb{E}_2, A \neq B, B \neq C, C \neq A : \forall p \in \mathcal{P} : A \notin p \vee B \notin p \vee C \notin p.$$

Axiom 4 (Euklidův axiom). Každým bodem, který neleží na dané přímce, prochází právě jedna přímka, která s danou přímkou nemá žádný společný bod.

$$\forall A \in \mathbb{E}_2, \forall p \in \mathcal{P} : A \notin p \implies \exists! q \in \mathcal{P} : A \in q \wedge p \cap q = \emptyset.$$

Definice 33. Necht $A, B, C \in \mathbb{E}_2$ jsou tři body. Jestliže všechny tři leží (resp. neleží) na jedné přímce, řekneme, že jsou **kolineární** (resp. **nekolineární**).

Axiom 5. Pro každé tři body platí, že pokud jeden leží mezi druhými dvěma, tyto tři body jsou kolineární.

$$\forall A, B, C \in \mathbb{E}_2 : C \mu AB \implies A, B, C \text{ jsou tři různé kolineární body.}$$

Axiom 6. Pro každé dva různé body A, B existuje bod C takový, že bod B leží mezi body A a C .

$$\forall A, B \in \mathbb{E}_2, A \neq B : \exists C \in \mathbb{E}_2 : B \mu AC.$$

Axiom 7. Pro každé dva různé body A, B existuje bod C takový, že bod C leží mezi body A a B .

$$\forall A, B \in \mathbb{E}_2, A \neq B : \exists D \in \mathbb{E}_2 : D \mu AB.$$

Axiom 8. Ze tří po dvou různých kolineárních bodů právě jeden leží mezi dvěma ostatními.

$$\forall A, B, C \in p \in \mathcal{P} \text{ kolineární, } A \neq B, B \neq C, C \neq A : A \bar{\mu} BC \wedge B \bar{\mu} AC \implies C \mu AB.$$

Axiom 9. Pro každé čtyři různé body A, B, C, D platí, že pokud bod B leží mezi body A a C a bod C leží mezi body B a D , pak bod B leží mezi body A a D .

$$\forall A, B, C, D \in \mathbb{E}_2, B \mu AC \wedge C \mu BD \implies B \mu AD.$$

Axiom 10. Pro každé čtyři různé body A, B, C, D platí, že pokud bod B leží mezi body A a D a bod C leží mezi body B a D , pak bod C leží mezi body A a D .

$$\forall A, B, C, D \in \mathbb{E}_2, B \mu AC \wedge C \mu BD \implies B \mu AD.$$

Definice 34. Necht $p, q \in \mathcal{P}$. Jestliže platí:

- i. $p = q$, pak přímky p, q se nazývají **splývající rovnoběžky**,
- ii. $p \neq q \wedge p \cap q = \emptyset$, pak přímky p, q se nazývají **různé rovnoběžky**,
- iii. $p \neq q \wedge p \cap q \neq \emptyset$, pak přímky p, q se nazývají **různoběžky**.

Definice 35. Necht $p \in \mathcal{P}, A \in p, B \in p, A \neq B$. Množinu

$$P(A) = \{X \in \mathbb{E}_2; X = B \vee X \mu AB \vee B \mu AX\}$$

(resp. množinu $P(A) \cup \{A\}$) nazýváme **otevřenou** (resp. **uzavřenou**) **polopřímku** AB s počátkem v bodě A . Značíme $\overrightarrow{AB}$. Množinu

$$Q(A) = \{X \in \mathbb{E}_2; A \mu BX\}$$

(resp. množinu $Q(A) \cup \{A\}$) nazýváme **otevřenou** (resp. **uzavřenou**) **polopřímku opač-**

nou k polopřímce $\overrightarrow{AB}$ s počátkem A .

Definice 36. Necht body $A, B \in \mathbb{E}_2, A \neq B$. Průnik uzavřených polopřímek $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BA}$ nazveme **úsečkou** AB . Body A, B se nazývají **krajní body úsečky** AB , jakýkoliv bod $X \mu AB$ se nazývá **vnitřní bod** úsečky AB .

Definice 37. Necht $a \in \mathcal{P}, A \notin a, B \notin a, A \neq B$. Pak **přímka** a **odděluje** body A, B , zapisujeme $a \nu AB$, pokud $a \cap AB \neq \emptyset$. V opčaném případě **přímka** a **neodděluje** body A, B . Zapisujeme $a \bar{\nu} AB$.

Definice 38. Necht $a \in \mathcal{P}$. Pak všechny $X \in \mathbb{E}_2 \setminus a$ lze rozdělit do dvou podmnožin $P(a), Q(a)$ tak, že:

i. přímka a odděluje každé dva body z různých podmnožin:

$$\forall x \in P(a), \forall Y \in Q(a) : a \nu XY,$$

ii. přímka a neodděluje žádné dva body z jedné podmnožiny:

$$\forall X, Y \in P(a) \wedge \forall X, Y \in Q(a) : a \bar{\nu} XY.$$

Pak množinu $P(a)$ (resp. množinu $Q(a)$) nazveme **otevřenou polorovinou s hraniční přímkou** a (resp. **otevřenou polorovinou s hraniční přímkou** a **opačnou k** $P(a)$). Množinu $P(a) \cup a$ (resp. $Q(a) \cup a$) nazveme **uzavřenou polorovinou s hraniční přímkou** a (resp. **uzavřenou polorovinou s hraniční přímkou** a **opačnou k** $P(a)$).

Definice 39. Necht $A, B, V \in \mathbb{E}_2$ jsou tři různé nekolineární body. Průnik polorovin $\overrightarrow{VBA} \cap \overrightarrow{VAB}$ nazveme **konvexním úhlem** (zapisujeme $\sphericalangle AVB$), V jeho **vrcholem**, polopřímky $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$ jeho **rameny**. **Nekonvexním úhlem** $\sphericalangle AVB$ nazveme sjednocení polorovin opačných k polorovinám $\overrightarrow{VBA}, \overrightarrow{VAB}$.

Definice 40. Necht $A, B, C \in \mathbb{E}_2$ jsou tři různé nekolineární body. **Trojúhelníkem** ABC (značíme $\triangle ABC$) nazýváme průnik polorovin $\overrightarrow{ABC} \cap \overrightarrow{BCA} \cap \overrightarrow{CAB}$. Body A, B, C nazýváme **vrcholy** tohoto trojúhelníka, úsečky AB, BC, CA jeho **stranami**.

Definice 41. Necht $A, B \in \mathbb{E}_2$. Přiřaďme uspořádané dvojici bodů (A, B) reálné číslo označené $|AB|$, které nazveme **délkou úsečky** AB , pro něž platí:

i. $|AB| \geq 0$, přičemž $|AB| = 0 \iff A = B$,

ii. $|AB| = |BA|$,

iii. $C \mu AB \implies |AB| = |CB| + |AC|$,

iv. Necht $\overrightarrow{AB}$ je polopřímka, $m \in \mathbb{R}_0^+$. Pak $\exists! C \in \overrightarrow{AB}$ tak, že $|AC| = m$.

Definice 42. Necht máme konvexní úhel $\sphericalangle AVC$. Úhlu $\sphericalangle AVC$ přiřadíme číslo $a \in \langle 0, 180 \rangle$, které nazveme **velikostí úhlu** (značíme $|\sphericalangle AVC|$) **ve stupních** tak, že

- i. nulový úhel má velikost 0° , přímý 180° ,
- ii. každý jiný konvexní úhel má velikost n° , kde $0^\circ < n^\circ < 180^\circ, n \in \mathbb{R}$,
- iii. jestliže polopřímka $\overrightarrow{VB}$ prochází mezi rameny konvexního úhlu $\sphericalangle AVC$, pak $|\sphericalangle AVC| = |\sphericalangle AVB| + |\sphericalangle BVC|$ a
- iv. je-li $\overrightarrow{VA}$ je polopřímka, $u \in \mathbb{R}, u \in \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$, pak existuje polopřímka $\overrightarrow{VB}$ taková, že $|\sphericalangle AVB| = u^\circ$.

Definice 43. Necht máme úhel $\sphericalangle AVB$. Úhlu $\sphericalangle AVB$ přiřadíme číslo $a \in \langle 0, 2\pi \rangle$, které nazveme **velikostí úhlu** (značíme $|\sphericalangle AVB|$) **v radiánech** takto:

Necht $k(V, r), X \in k \cap \overrightarrow{VA}, Y \in k \cap \overrightarrow{VB}$. Označme s velikost oblouku XY . Velikost úhlu pak definujeme jako

$$|\sphericalangle AVB| = \frac{s}{r}.$$

Poznámka 11. Je-li $s = r$, má úhel $\sphericalangle AVB$ velikost 1 **radián**.

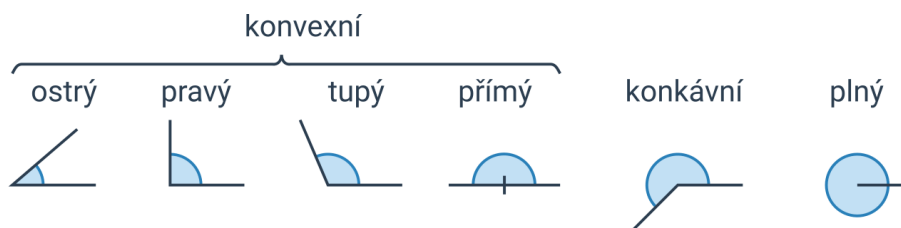
Věta 17. Necht $\sphericalangle AVB$ je úhel, φ jeho velikost v radiánech a α jeho velikost ve stupních. Pak platí:

$$\varphi = \alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ}, \quad \alpha = \varphi \cdot \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Definice 44. Necht $p, q \in \mathcal{P}$ jsou dvě různoběžky. Řekneme, že p, q jsou na sebe **kolmé** (a zapisujeme $p \perp q$), jestliže všechny čtyři úhly, které spolu svírají, jsou shodné (a tedy pravé).

Poznámka 12 (Klasifikace úhlů podle velikosti). Necht α je velikost úhlu $|\sphericalangle ABC|$. Potom je úhel $|\sphericalangle ABC|$

- nulový, pokud $\alpha = 0^\circ$,
- ostrý, pokud $0^\circ < \alpha < 90^\circ$,
- pravý, pokud $\alpha = 90^\circ$,
- tupý, pokud $90^\circ < \alpha < 180^\circ$,
- přímý, pokud $\alpha = 180^\circ$,
- konvexní, pokud $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$,
- nekonvexní, pokud $180^\circ < \alpha < 360^\circ$,
- plný, pokud $\alpha = 360^\circ$,
- kosý, pokud je ostrý nebo tupý.



Obrázek 2 – Klasifikace úhlů podle velikosti

Definice 45. Necht $A, B \in \mathbb{E}_2$. **Vzdáleností bodů** A, B nazveme délku úsečky AB .

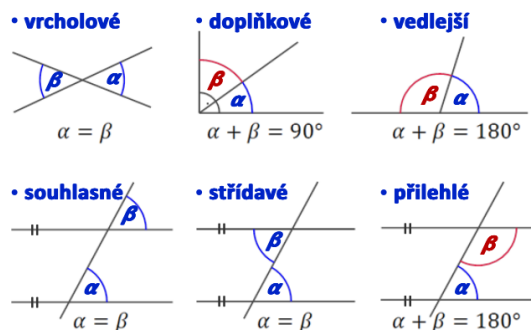
Definice 46. Necht $P \in \mathbb{E}_2, p \in \mathcal{P}$. **Vzdáleností bodu** P **od přímky** p nazveme reálné číslo označené $\rho(P, p)$ takové, že $\rho(P, p) = |PP_0|$, kde P_0 je kolmý průmět bodu P na přímku p .

Definice 47. Necht $a, b \in \mathcal{P}, a \parallel b$. **Vzdáleností dvou přímek** a, b nazveme reálné číslo označené $\rho(a, b)$ takové, že $\rho(a, b) = \rho(A, b)$, kde $A \in a$ je libovolný bod.

Definice 48. Necht $a, b \in \mathcal{P}$. **Odchylkou přímek** a, b nazveme reálné číslo $\varphi^\circ \in \langle 0, 90 \rangle$, kde φ je velikost úhlu, který spolu přímky a, b svírají. U rovnoběžek klademe $\varphi = 0^\circ$.

Definice 49. Dva úhly nazveme

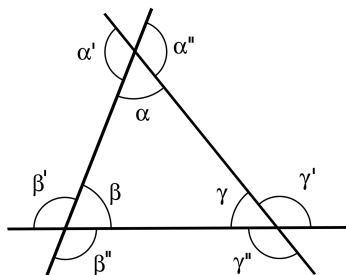
- **vrcholové**, jestliže jsou jejich ramena opačné polopřímky,
- **vedlejší**, jestliže je jejich jedno rameno společné a zbylá dvě ramena jsou opačné polopřímky,
- **souhlasné**, jestliže jejich první ramena leží na jedné přímce a druhá ramena jsou rovnoběžná, přitom směr příslušných ramen je stejný,
- **střídavé**, jestliže jejich první ramena leží na jedné přímce a druhá ramena jsou rovnoběžná, přitom směr příslušných ramen je opačný,
- **přilehlé**, jestliže jejich první ramena leží na jedné přímce a jdou do opačných směrů a druhá ramena jsou rovnoběžná.



Obrázek 3 – Dvojice úhlů

Definice 50. Dvě polopřímky ležící na téže přímce nazýváme **souhlasnými**, jestliže jedna z nich je podmnožinou druhé. V opačném případě je nazveme **nesouhlasnými**.

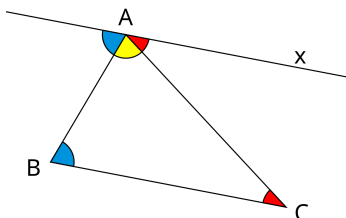
Definice 51. Nechť je dán trojúhelník $\triangle ABC$. **Vnitřním úhlem** $\triangle ABC$ při vrcholu A (resp. B , resp. C) nazýváme úhly $\sphericalangle CAB$ (resp. $\sphericalangle ABC$, resp. $\sphericalangle BCA$), **vnějším úhlem** $\triangle ABC$ při vrcholu A (resp. B , resp. C) pak vedlejší úhel k úhlu $\sphericalangle CAB$ (resp. $\sphericalangle ABC$, resp. $\sphericalangle BCA$).



Obrázek 4 – Trojúhelník s vnitřními (α , β , γ) a vnějšími (α' , β' , γ') úhly

Věta 18. Součet všech vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180° .

Důkaz. Bez újmy na obecnosti vedme bodem A rovnoběžku se stranou a . Odtud lze jasně vidět, že zbylé dva úhly k úhlu α jsou střídavé s úhly β , γ , a tedy i shodné. Celkem dávají přímý úhel, t.j. jejich součet je 180° , což jsme chtěli dokázat. $\square$



Obrázek 5 – Součet úhlů v trojúhelníku

Věta 19. Součet libovolných dvou vnitřních úhlů v trojúhelníku je menší než 180° .

Důkaz. Plyne z předchozí věty a tvrzení, že vnitřní úhel v trojúhelníku je nenulový. $\square$

Věta 20. V každém trojúhelníku je velikost vnějšího úhlu při jednom vrcholu rovna součtu velikostí dvou zbylých vnitřních úhlů.

Důkaz. Jistě platí $\alpha + \alpha' = 180^\circ$, protože jsou to úhly vedlejší. Zároveň platí $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Celkem tedy máme $\alpha' = \beta + \gamma$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Definice 52. Trojúhelník se nazývá **rovnoramenný**, jestliže alespoň dvě jeho strany jsou shodné úsečky. Strany stejné délky nazveme **rameny**, tu třetí **základnou** a vrchol proti základně **vrcholem**. Trojúhelník se nazývá **rovnostranný**, jestliže všechny tři jeho strany jsou shodné úsečky. Trojúhelník se nazývá **pravoúhlý**, jestliže je jeden jeho vnitřní úhel pravý. Dvě strany, které jsou rameny pravého úhlu nazveme **odvěsnami**, tu třetí **přeponou**.

Definice 53. **Střední příčka** trojúhelníku nazýváme úsečku spojující středy dvou stran trojúhelníku. **Těžnicí** trojúhelníku nazýváme úsečku spojující vrchol trojúhelníku se středem protější strany. **Výškou** trojúhelníku nazýváme úsečku procházející vrcholem trojúhelníku, která je kolmá na přímkou, na které leží protější strana trojúhelníku. Průsečík výšek nazýváme **ortocentrum**.

Věta 21. Každá střední příčka je rovnoběžná s protilehlou stranou a je dvakrát menší než protilehlá strana.

Důkaz. Trojúhelníky vrchol – střední příčka a vrchol – protilehlá strana jsou zjevně podobné s koeficientem 2. $\square$

Věta 22. Těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který je dělí v poměru 2 : 1.

Důkaz. V trojúhelníku ABC jsou těžnice t_a, t_b, t_c . Sestrojíme body X, Y tak, aby $ABXC$ a $ABCY$ byly rovnoběžníky. Jistě jsou AX , resp. BY jejich úhlopříčky. Zároveň je $|AB| = |CX| = |CY|$, takže C je střed XY . Těžnice t_c je tím pádem osou souměrnosti lichoběžníka $ABXY$, a proto leží na průsečíku jeho úhlopříček (tento lichoběžník je rovnoramenný).

V témže trojúhelníku označme středy stran S_a, S_b, S_c . Trojúhelník $S_a S_b S_c$ je pak podobný s trojúhelníkem ABC s koeficientem $1/2$ (jeho strany jsou středními příčkami trojúhelníka ABC). Navíc těžnice „menšího“ trojúhelníka leží na těžnicích toho „většího“. Proto i $|AT| = 2|S_b S_c T|$, což jsme chtěli ukázat. $\square$

Definice 54. Průsečík těžnic nazýváme **těžištěm**.

Věta 23. Nechť $\triangle ABC$ je rovnoramenný trojúhelník se základnou AB . Pak platí, že těžnice t_c splývá s výškou v_c a s osou úhlu $\sphericalangle ACB$.

Důkaz. Nechť $t_c = CC_1$, kde C_1 je středem AB . $\triangle AC_1 C \cong \triangle BC_1 C$ (sus), neboť $|AC| = |BC|$, $|AC_1| = |BC_1|$ a $|\sphericalangle CAC_1| = |\sphericalangle CBC_1|$

$$i. \quad |\sphericalangle AC_1 C| = |\sphericalangle BC_1 C| = 90^\circ \implies CC_1 = v_c,$$

$$ii. \quad |\sphericalangle AC_1 C| = |\sphericalangle BC_1 C| \implies CC_1 = \text{osa úhlu } \sphericalangle ACB. \quad \square$$

Věta 24 (Trojúhelníková nerovnost). V každém $\triangle ABC$ platí, že součet délek dvou libovolných stran je větší než strana třetí.

Důkaz. Ukážeme, že $|AC| < |AB| + |BC|$. Sestrojíme na $\overrightarrow{AB}$ bod D tak, že $|BD| = |BC| \wedge B \mu AD$. $\triangle BCD$ je rovnoramenný s hlavním vrcholem $B \implies \omega_1 = \delta \wedge B \mu AD \implies \omega_1 < \omega \implies \delta < \omega \implies |AC| < |AD| = |AB| + |BD| = |AB| + |BC| \implies |AC| < |AB| + |BC|$. $\square$

Věta 25 (Věty o shodnosti trojúhelníků).

- **sss:** Shodují-li se dva trojúhelníky ve všech třech odpovídajících si stranách, jsou shodné.
- **sus:** Shodují-li se dva trojúhelníky ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném, jsou shodné.
- **usu:** Shodují-li se dva trojúhelníky v jedné straně a v obou úhlech k ní přilehlých, jsou shodné.
- **Ssu:** Shodují-li se dva trojúhelníky ve dvou stranách a úhlu proti delší z nich, jsou shodné.

Důkaz. Jednu si určíme jako axiom (třeba sus) a zbylé převedeme na tuto rozkladem na případy. $\square$

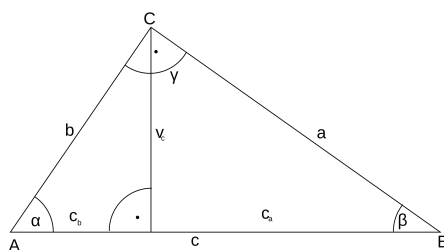
Definice 55. Trojúhelníky jsou **podobné**, zapisujeme $\triangle ABC \approx \triangle DEF$, jestliže $\exists k \in \mathbb{R}^+$: $k = \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|}$. Číslo k nazveme **koefficientem podobnosti**.

Věta 26 (Věty o podobnosti trojúhelníků).

- **uu:** Shodují-li se dva trojúhelníky ve dvou úhlech, jsou podobné.
- **sus:** Shodují-li se dva trojúhelníky v poměru dvou stran a úhlu jimi sevřeném, jsou podobné.

Věta 27 (Euklidova věta o výšce). Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB . Pak

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b$$



Obrázek 6 – Euklidova věta o výšce

Důkaz. Podle obrázku 6 je $\triangle ACC_0 \approx \triangle CBC_0$, kde C_0 je kolmý průmět bodu C na stranu AB (dle věty uu), neboť $\sphericalangle C_0CB$ je otočením $\sphericalangle C_0AC$. Pak taky $\frac{|CC_0|}{|AC_0|} = \frac{|BC_0|}{|CC_0|} \implies \frac{v_c}{c_b} = \frac{c_a}{v_c}$ a tedy $v_c^2 = c_a \cdot c_b$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Věta 28 (Euklidovy věty o odvěsnách). *Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB . Pak*

$$b^2 = c \cdot c_b$$

$$a^2 = c \cdot c_a$$

Důkaz. Podle obrázku 6 je $\triangle ABC \approx \triangle CBC_0$, kde C_0 je kolmý průmět bodu C na stranu AB (dle věty uu), neboť $\angle C_0BC$ je otočením $\angle CBA$. Pak taky $\frac{|BC_0|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|} \implies \frac{c_a}{a} = \frac{a}{c}$ a tedy $a^2 = c_a \cdot c$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Věta 29 (Pythagorova). *Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou c . Pak*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Důkaz. Z Euklidovy věty o výšce platí $cc_a = a^2$, $cc_b = b^2$, po sečtení těchto dvou vztahů získáme

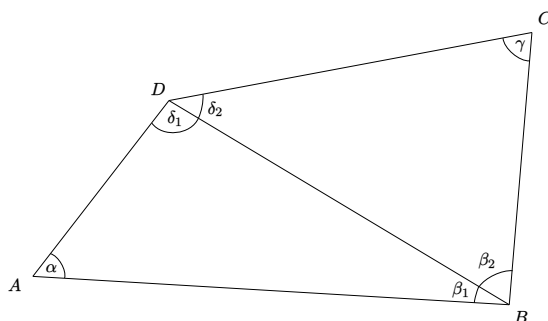
$$cc_a + cc_b = a^2 + b^2 \iff c(c_a + c_b) = a^2 + b^2 \iff c^2 = a^2 + b^2. \quad \square$$

Definice 56. Nechť $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{E}_2$ jsou čtyři body, z nichž žádné tři nejsou kolineární. Sjednocení úseček $A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_3A_4 \cup A_4A_1$ nazveme **uzavřenou lomenou čarou**.

Definice 57. Nechť $ABCD$ je uzavřená lomená čára, která sama sebe neprotíná. Pak **čtyřúhelníkem** $ABCD$ nazveme sjednocení této lomené čáry s množinou jejích vnitřních bodů. Body A, B, C, D se nazývají **vrcholy**, uzavřená lomená čára $ABCD$ **obvodem**, každá úsečka **stranou** a úsečky AC, BD se nazývají **úhlopříčky**.

Věta 30. *Součet vnitřních úhlů čtyřúhelníka je 360° .*

Důkaz. Čtyřúhelník $ABCD$ lze rozdělit na dva trojúhelníky $\triangle ABD$ a $\triangle BCD$ jako na obrázku. Pak jistě platí $\alpha + \beta_1 + \delta_1 = 180^\circ$ a $\beta_2 + \gamma + \delta_2 = 180^\circ$. Součet všech vnitřních úhlů čtyřúhelníka $ABCD$ je tedy $\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_1 + \delta_2 = 360^\circ$, což jsme chtěli dokázat. $\square$



Obrázek 7 – Čtyřúhelník $ABCD$

Definice 58. Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník, jehož protější strany jsou rovnoběžné. Pak ho nazveme **rovnoběžníkem**.

Věta 31. V rovnoběžníku $ABCD$ platí:

- i. $|AB| = |CD| \wedge |BC| = |AD|$,
- ii. protilehlé úhly jsou shodné.

Důkaz. Plyne ze shodnosti trojúhelníků $\triangle ABD$ a $\triangle CDB$. □

Věta 32. Úhlopříčky rovnoběžníka se navzájem půlí.

Důkaz. Plyne ze shodnosti trojúhelníků $\triangle ASD$ a $\triangle CSB$, kde S je průsečík úhlopříček. □

Definice 59. Čtyřúhelník, jehož všechny čtyři úhly jsou pravé, nazveme **pravoúhelník**.

Věta 33.

- i. Každý pravoúhelník je rovnoběžník.
- ii. Úhlopříčky pravoúhelníka jsou shodné.

Důkaz.

- i. Protější úhly v rovnoběžníku jsou střídavé úhly u rovnoběžek.
- ii. Plyne ze shodnosti trojúhelníků ABD a BAC . □

Definice 60. Rovnoběžník $ABCD$ se nazývá **kosočtvercem** (resp. **kosodélníkem**), jestliže $|AB| = |BC|$ (resp. $|AB| \neq |BC|$) a žádný vnitřní úhel není pravý.

Věta 34. Úhlopříčky v kosočtverci se navzájem půlí.

Definice 61. Pravoúhelník $ABCD$ nazýváme

- **čtvercem**, jestliže $|AB| = |BC|$,
- **obdélníkem**, jestliže $|AB| \neq |BC|$.

Definice 62. Konvexní čtyřúhelník $ABCD$, kde $AB \parallel CD \wedge BC \nparallel AD$, nazveme **lichoběžníkem**. Strany AB, CD nazveme **základnami** a strany BC a DA **rameny lichoběžníka**.

Definice 63. Uzavřená lomená čára $A_1A_2 \dots A_nA_1$, která leží v rovině a sama sebe nikdy neprotíná ohraničuje část roviny, která se nazývá **mnohoúhelník** nebo také **n -úhelník**.

Definice 64. Nechť $S \in \mathbb{E}_2, r \in \mathbb{R}^+$. **Kružnicí** (resp. **kruhem**) se středem S a poloměrem r nazýváme množinu všech bodů $X \in \mathbb{E}_2$, kde $|SX| = r$ (resp. $|SX| \leq r$).

Definice 65. Necht $k(S, r)$ je kružnice, $X_1, X_2 \in k, X_1 \neq X_2$. Úsečku (resp. přímkou) X_1X_2 nazýváme **tětivou** (resp. **sečnou**) kružnice k .

Definice 66. Necht $k(S, r)$ je kružnice, $T \in k$. Přímkou t , pro níž platí $T \in t \wedge ST \perp t$ nazýváme **tečnou** kružnice k s **bodem dotyku** T .

Definice 67. Necht je dán oblouk AB na kružnici $k(S, r)$. Polopřímky $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}$ jsou rameny dvou úhlů, z nichž právě jedno obsahuje oblouk AB . Tento úhel nazýváme **středovým úhlem** příslušným oblouku AB . Každý úhel $\sphericalangle AXB$, kde $X \in k \wedge X \notin AB$, nazýváme **obvodovým úhlem** příslušným oblouku AB .

Věta 35. Necht $k(S, r)$ je kružnice. Pak středový úhel je dvojnásobkem libovolného obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku kružnice.

Důkaz. Rozdělíme na tři případy polohy ostrého obvodového úhlu $\sphericalangle AXB$ vůči středu kružnice S .

i. střed kružnice leží na rameni obvodového úhlu

Trojúhelník $\triangle SXB$ je rovnoramenný se základnou BX , takže $|\sphericalangle SBX| = |\sphericalangle SXB| = \varphi$. Označme $|\sphericalangle ASB| = \omega$. Pak $2\varphi + (180^\circ - \omega) = 180^\circ$, tedy $\omega = 2\varphi$, což jsme chtěli dokázat.

ii. střed kružnice leží uvnitř obvodového úhlu

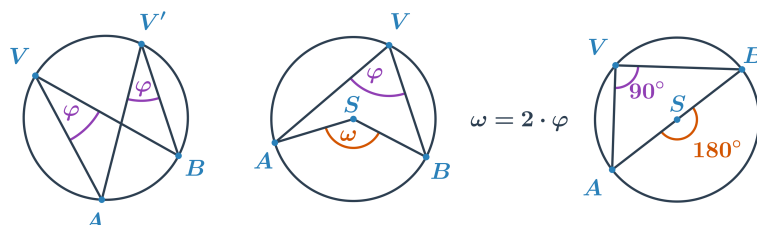
Označme průsečík přímky XS s kružnicí k , který je různý od X jako C . Pak protože $|\sphericalangle AXC| = 2 \cdot |\sphericalangle ASC|$ a $|\sphericalangle BXC| = 2 \cdot |\sphericalangle BSC|$, což už jsme dokázali v i., pak i $|\sphericalangle AXB| = 2 \cdot |\sphericalangle ASB|$.

iii. střed kružnice leží vně obvodového úhlu

Označme průsečík přímky XS s kružnicí k , který je různý od X jako C . Pak $|\sphericalangle BXC| = 2 \cdot |\sphericalangle BSC|$ a $|\sphericalangle AXC| = 2 \cdot |\sphericalangle ASC|$, což už jsme dokázali v i.. Pak i $|\sphericalangle AXB| = 2 \cdot |\sphericalangle ASB|$. $\square$

Věta 36. Každé dva obloukové úhly příslušné témuž oblouku kružnice jsou shodné.

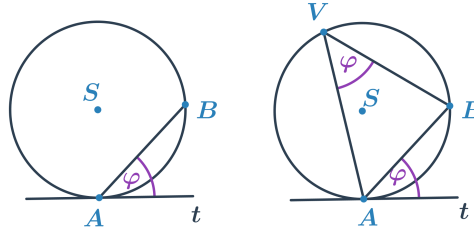
Věta 37 (Thaletova). Každý obvodový úhel příslušný polokružnici je pravý.



Obrázek 8 – Obvodový a středový úhel, Thaletova kružnice

Definice 68. Nechť AB je menší oblouk kružnice $k(S, r)$, t tečna ke kružnici k v bodě A , bod $C \in t$, $C \in o$, kde o je polorovina k $\overrightarrow{AB\hat{S}}$. Úhel $\angle CAB$ nazýváme **úsekovým úhlem** příslušným oblouku AB .

Věta 38. Úsekový úhel příslušný oblouku AB má stejnou velikost jako obvodový úhel příslušný témuž oblouku.



Obrázek 9 – Úsekový úhel

Definice 69. Nechť AB je úsečka. **Osou úsečky** AB nazveme přímku o , která prochází středem úsečky AB a je na ni kolmá.

Věta 39. Nechť AB je úsečka. Množinou všech bodů $X \in \mathbb{E}_2$, pro něž $|AX| = |BX|$, je **osa** o úsečky AB .

Důkaz. Označme $U = \{X \in \mathbb{E}_2 : |AX| = |BX|\}$.

- i. $o \subseteq U : X \in o \text{ lib.} \Rightarrow$ nechť $X \in AB \Rightarrow X = S$ – střed $AB \Rightarrow |AS| = |BS| \Rightarrow X \in U$. Nechť $X \notin AB \Rightarrow \triangle ASX \cong \triangle BSX$ (sus) $\Rightarrow |AX| = |BX| \Rightarrow X \in U$.
- ii. $U \subseteq o : X \in U \text{ lib.} \Rightarrow |AX| = |BX| \Rightarrow$ nechť $X \in AB \Rightarrow X = S \in o$. Nechť $X \notin AB \Rightarrow \exists \triangle ABC$ – rovnoramenný se základnou AB , kde XS je těžnice, ale i výška $\Rightarrow XS \perp AB \Rightarrow X \in o$. □

Věta 40. Nechť AB je úsečka, o její osa. Pak platí:

- i. $\overrightarrow{o\hat{A}} = \{X \in \mathbb{E}_2 : |AX| \leq |BX|\}$,
- ii. $\overrightarrow{o\hat{B}} = \{X \in \mathbb{E}_2 : |AX| \geq |BX|\}$.

Důkaz.

- i. Nechť $X \in \overrightarrow{o\hat{A}}$. Nechť $X \in o \Rightarrow$ platí podle věty 39. Nechť $X \notin o$. Nechť $X \in AB$ – zřejmé. Nechť $X \notin AB$. Označme $Y \in o \cap BX$, $|BX| = |BY| + |YX| = |AY| + |YX| > |AX| \Rightarrow |BX| > |AX| \Rightarrow$ platí vlastnost.
- ii. Nechť $X \notin \overrightarrow{o\hat{A}}$. Nechť $X \notin o \Rightarrow X \in \overrightarrow{o\hat{B}} \Rightarrow |BX| < |AX| \Rightarrow$ neplatí vlastnost pro polorovinu $\overrightarrow{o\hat{A}}$. □

Věta 41. Necht a, b jsou dvě různoběžky, $a \cap b = \{P\}$. Množinou všech bodů $X \in \mathbb{E}_2$, pro něž platí $\rho(X, a) = \rho(X, b)$, je sjednocení přímek $o_1 \cap o_2$, kde o_1, o_2 jsou osy úhlů, které přímky a, b svírají.

Definice 70. Necht a, b jsou dvě různé rovnoběžky. Množinou všech bodů $X \in \mathbb{E}_2$, pro něž platí $\rho(X, a) = \rho(X, b)$ je přímka $o \parallel a$, kde $\rho(o, a) = \rho(o, b)$. Tuto přímku nazveme **osou pásu** s hraničními přímkami a, b .

Věta 42. Necht $\sphericalangle AVB$ je konvexní nenulový úhel. Množinou všech bodů $X \in \mathbb{E}_2, X \in \sphericalangle AVB$, pro něž platí $\rho(X, \overrightarrow{VA}) = \rho(X, \overrightarrow{VB})$, je polopřímka o , která je osou konvexního úhlu $\sphericalangle AVB$.

Definice 71. Necht p je přímka. Množinou všech bodů $X \in \mathbb{E}_2$, které mají od přímky p stejnou vzdálenost $a \in \mathbb{R}^+$, je sjednocení přímek $e_1 \cup e_2$, kde $e_1 \parallel e_2 \wedge \rho(e_1, p) = \rho(e_2, p) = a$. Tyto přímky nazveme **ekvidistantou přímky p** .

Definice 72. Necht $k(S, r)$ je kružnice. Množinou všech bodů $X \in \mathbb{E}_2$, které mají od kružnice k stejnou vzdálenost $a, a \in \mathbb{R}^+, a < r$, je sjednocení kružnic e_1, e_2 , kde kružnice k, e_1, e_2 jsou soustředné a platí $\rho(e_1, k) = \rho(e_2, k) = a$. Tyto kružnice nazveme **ekvidistantou kružnice k** .

Definice 73. Necht AB je úsečka. Množinou všech vrcholů $C \in \mathbb{E}_2$ všech pravoúhlých trojúhelníků $\triangle ABC$ s přeponou AB je množina $k \setminus \{A, B\}$, kde $k\left(S, \frac{|AB|}{2}\right)$ je kružnice, S je střed AB . Tuto množinu budeme nazývat **Thaletovou kružnicí** nad přeponou AB a označovat $\tau(AB)$.

Věta 43. Necht AB je úsečka, $|\sphericalangle ACB|$ velikost úhlu γ . Množinou vrcholů $X \in \mathbb{E}_2$ všech $\triangle ABX$ s jednou stranou AB a úhlem γ o velikosti $|\sphericalangle ACB|$ je sjednocení vnitřku oblouku ACB s jeho obrazem $AC'B'$ v souměrnosti podle přímky AB .

Poznámka 13. Pokud $\sphericalangle AXB = \alpha$, pak říkáme, že úsečka AB je vidět z bodu X pod úhlem α , resp. úhel α se nazývá **zorným úhlem úsečky AB** .

Definice 74. Necht $\triangle ABC$ je trojúhelník. Kružnici, která prochází body A, B, C , nazveme **kružnicí opsanou** trojúhelníku $\triangle ABC$. Kružnici, která se dotýká všech tří stran trojúhelníku $\triangle ABC$, nazveme **kružnicí vepsanou** trojúhelníku $\triangle ABC$.

Věta 44. Střed kružnice trojúhelníku opsané (resp. vepsané) leží v průsečíku os stran (resp. os úhlů) daného trojúhelníku.

Definice 75. Necht je dána kružnice $k(S, r)$. Konvexní čtyřúhelník $ABCD$, který je vepsán do kružnice k , nazýváme **tětivovým čtyřúhelníkem**. Konvexní čtyřúhelník $EFGH$, který je opsán kružnici k , nazýváme **tečnovým čtyřúhelníkem**.

Věta 45. Necht je dán čtyřúhelník $ABCD$ se stranami a, b, c, d a úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Pak platí:

- $ABCD$ je tětívový $\iff \alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$,
- $ABCD$ je tečnový $\iff a + c = b + d$.

Definice 76. Je dán bod M a kružnice k se středem O a poloměrem r . **Mocností bodu M ke kružnici k** rozumíme číslo $p(M, k) = |MO|^2 - r^2$.

Věta 46. Nechť přímka p vedená bodem M protne kružnici k v bodech A, B . Pak platí

$$p(M, k) = \begin{cases} |MA| \cdot |MB|, & \text{leží-li } M \text{ vně } k, \\ -|MA| \cdot |MB|, & \text{leží-li } M \text{ uvnitř } k. \end{cases}$$

Důkaz. Nechť je dána kružnice $k(O, r)$ a bod M , který leží v její vnější oblasti. Bodem M je dále vedena přímka, která protne kružnici k v bodech A, B tak, že $B \in \overrightarrow{AM}$. Konečně vedme bodem M tečnu s bodem dotyku T ke kružnici k takovou, že přímka $\overleftrightarrow{AM}$ neodděluje body O a T .

Úhly $\sphericalangle MAT$ a $\sphericalangle BTM$ jsou shodné, protože jsou úhlem obvodovým, resp. úsekovým příslušným témuž oblouku BT . Pak jsou trojúhelníky $\triangle ATM$ a $\triangle TBM$ podobné. Platí tedy

$$\frac{|MB|}{|MT|} = \frac{|MT|}{|MA|} \iff |MT|^2 = |MA| \cdot |MB|.$$

Jenže MT je odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka $\triangle OMT$ s přeponou OM . Je tedy

$$p(M, k) = |OM|^2 - r^2 = |MT|^2 = |MA| \cdot |MB|,$$

což jsme chtěli dokázat. Obdobně postupujeme i je-li M ve vnitřní oblasti kružnice k . $\square$

Příklad 13. Dvě kružnice se protínají ve dvou bodech A, B , bod $X \in \overleftrightarrow{AB}$, ale neleží na úsečce AB . Dokažte, že délky úseků na tečnách vedených z bodu X ke kružnicím jsou shodné.

Řešení. Označme body dotyku T_1, T_2 . Z mocnosti bodu ke kružnici platí $|T_1X|^2 = |XB| \cdot |XA| = |XT_2|^2$.

Příklad 14. Je dána přímka p , kružnice k_1, k_2 v opačných polorovinách s hranicí p . Sestrojte úsečku XY tak, aby $X \in k_1, Y \in k_2, \overleftrightarrow{XY} \perp p$, a střed úsečky XY ležel na p .

Řešení. Rozbor: $XY \perp p \wedge \text{střed } XY \in p \implies X = \mathcal{O}_p(Y)$. Hledáme bod X : buď $X \in k_1$, nebo $X = \mathcal{O}_p(Y) \wedge Y \in k_2 \implies X \in \mathcal{O}_p(k_2) = k'_2$, celkem tedy máme $X \in k_1 \cap k'_2$. Dále nesmíme v řešení zapomenout zahrnout taky postup konstrukce, samotnou konstrukci a diskuzi počtu řešení (tady v závislosti na počtu průniků k_1 s k'_2).

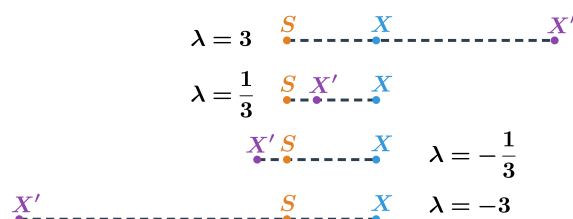
Příklad 15. Jsou dány dvě rovnoběžky a, b a mimo ně bod C . Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby $A \in a, B \in b$.

Řešení. Strana AC je stejně dlouhá jako BC a navíc svírají úhel 60° . Bod B tedy nalezneme jako průnik přímky b s otočením přímky a o 60° kolem bodu C .

Příklad 16. Zobrazte bod X ve stejnolehlosti dané bodem S a koeficientem

- i. $\lambda = 3$,
- ii. $\lambda = \frac{1}{3}$,
- iii. $\lambda = -\frac{1}{3}$,
- iv. $\lambda = -3$.

Řešení. Řešení vypadá následovně:



Příklad 17. Je dána kružnice k a uvnitř ní bod M . Sestrojte všechny tětiny této kružnice procházející bodem M , které jsou jím děleny v poměru $3 : 5$.

Řešení. Označme tětinu jako XY (X, Y jsou tedy na kružnici k). Pak Y je obraz bodu X ve stejnolehlosti se středem M a koeficientem $-\frac{5}{3}$. Protože body X leží na kružnici k , pak bod Y leží na kružnici k' (tj. obraz kružnice k ve výše popsané stejnolehlosti). Proto je Y průsečík $k \cap k'$.

Příklad 18. Je dán konvexní úhel $\angle AVB$ a vnitřní bod M tohoto úhlu. Sestrojte kružnici $k, M \in k$, která se dotýká obou ramen úhlu.

Řešení. Sestrojíme si libovolnou kružnici k' , která se dotýká ramen úhlu AVB a pak ji zobrazíme ve stejnolehlosti se středem V a koeficientem $\frac{|VM|}{|VM'|}$, kde M' je průsečík úsečky VM a kružnice k' .

Příklad 19. Je dána přímka p , kružnice k , která nemá s přímkou p společný bod a bod A , který neleží ani na přímce p , ani ve vnitřní oblasti kružnice k . Sestrojte trojúhelník ABC s úhlem $|\angle BAC| = 60^\circ$ tak, aby $B \in p, C \in k, |AC| = 2|AB|$.

Řešení. Bod C je obraz bodu B ve složeném zobrazení ze stejnolehlosti se středem v bodě A a koeficientem 2 a následném otočení o 60° Proto je bod C průsečík kružnice k a přímky p' získané výše popsaným zobrazením.

Kapitola 5

Kartézský součin, binární relace, zobrazení

Definice 77. Kartézským součinem množin A, B nazýváme množinu $A \times B$ všech uspořádaných dvojic (a, b) takových, že $a \in A, b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

Poznámka 14. Kartézský součin $A \times A$ nazveme **kartézským čtvercem** množiny A .

Poznámka 15. Kartézský graf je graf, kde prvky na ose x (resp. y) jsou prvky z množiny A (resp. B) a uspořádanou dvojici (a, b) zaneseme jako příslušný bod se souřadnicemi $[a, b]$.

Definice 78. Necht A, B jsou dvě množiny. Pak každou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$ nazýváme **binární relací** mezi množinami A, B (v tomto pořadí). Je-li speciálně $A = B$, pak hovoříme o **binární relaci v množině A** .

Definice 79. Necht $\alpha \subseteq A \times B$ je binární relace. Je-li uspořádaná dvojice $(a, b), a \in A, b \in B$ prvkem množiny α , říkáme, že **a je v relaci s b** a píšeme $a \sim b$.

Příklad 20. Znáznorněte graf relace $U = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x - y + 1 = 0\}$.

Řešení. Řešením je přímka $y = x + 1$.

Definice 80. Relaci na množině A nazveme

- i. **reflexivní**, pokud $\forall a \in A : a \sim a$,
- ii. **symetrickou**, pokud $\forall a, b \in A : a \sim b \implies b \sim a$,
- iii. **tranzitivní**, pokud $\forall a, b, c \in A : a \sim b \wedge b \sim c \implies a \sim c$.

Definice 81. Relaci na množině A , která je zároveň reflexivní, symetrická a tranzitivní, nazveme **relací ekvivalence**.

Poznámka 16. Každé relaci ekvivalence na množině A přísluší **rozklad příslušný ekvivalenci** tak, že množinu A rozdělíme na po dvou disjunktní podmnožiny, jejichž sjednocení dává množinu A a navíc platí, že všechny prvky v jedné podmnožině jsou navzájem ekvivalentní a žádné dva prvky z jiných podmnožin ekvivalentní nejsou. Tyto podmnožiny potom nazveme **třídami rozkladu**.

Definice 82. Necht A, B jsou dvě množiny. **Zobrazením f z množiny A do množiny B** nazýváme relaci $f \subseteq A \times B$, pro níž platí: $\forall x \in A : \exists \text{ max. 1 } y \in B : (x, y) \in f$. Prvek x nazveme **vzorem** a y **obrazem**.

Definice 83. Necht $f \subseteq A \times B$ je zobrazení. **Definičním oborem** (resp. **oborem hodnot**) zobrazení f nazveme množinu $D(f) \subseteq A$ (resp. $H(f) \subseteq B$) všech prvků $a \in A$ (resp. $b \in B$) takových, že k nim existuje právě jedno $b \in B$ (resp. alespoň jedno $a \in A$) tak, že $b = f(a)$.

Definice 84. Pokud $D(f) = A$ (resp. $D(f) \neq A$), hovoříme o **zobrazení množiny** (resp. **zobrazení z množiny**) A . Pokud $H(f) = B$ (resp. $H(f) \neq B$), hovoříme o **zobrazení na množinu** (resp. **zobrazení do množiny**) B . Zobrazení množiny na množinu nazýváme **surjekcí**. Je-li $A = B$ (resp. $A = B \wedge (A = D(f) \vee B = H(f))$), hovoříme o **zobrazení v množině** (resp. **zobrazení na množině**) A .

Definice 85. Necht f je zobrazení z A do B . Zobrazení f je **prosté** neboli **injektivní**, jestliže ke každému $b \in B$ existuje nejvýše jedno $a \in A$ takové, že $b = f(a)$.

Definice 86. Zobrazení, které je současně surjekcí a injekcí, nazýváme **bijekce**.

Definice 87. Necht $\alpha \subseteq A \times B$ je binární relace. **Inverzní relací** k relaci α nazveme relaci $\alpha^{-1} \subseteq B \times A$ takovou, že

$$\alpha^{-1} = \{(b, a) \in B \times A; (a, b) \in \alpha\}.$$

Je-li α^{-1} zobrazení, nazveme relaci α^{-1} **inverzním zobrazením** k zobrazení α .

Definice 88. Necht $f : B \rightarrow C, g : A \rightarrow B$ jsou zobrazení. **Složeným zobrazením** ze zobrazení f a g nazveme zobrazení $h : A \rightarrow C$ takové, že

$$h = \{(a, c) \in A \times C; \exists b \in B : f(b) = c \wedge g(a) = b\}.$$

Značíme $c = f(g(a))$, $h = f \circ g$ (čteme „ f po g “).

Kapitola 6

Funkce a jejich základní vlastnosti

Definice 89. Funkcí f nazýváme každé zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

Poznámka 17. Obecněji by se funkce dala definovat také jako zobrazení z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$.

Definice 90. Necht $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je funkce. Množinu

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \exists! y \in \mathbb{R} : y = f(x)\}$$

nazveme **definičním oborem** funkce f . Množinu

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)\}$$

nazveme **oborem hodnot** funkce f .

Příklad 21. Určete definiční obor a obor hodnot funkce $y = x^2 + x + 1$.

Řešení. Definiční obor je $\mathbb{R}$, obor hodnot (množinu všech vyhovujících a) získáme řešením rovnice $a = x^2 + x + 1$ v proměnné x :

$$a = x^2 + x + 1$$

$$0 = x^2 + x + 1 - a$$

$$D = 1 - 4(1 - a) = 4a - 3.$$

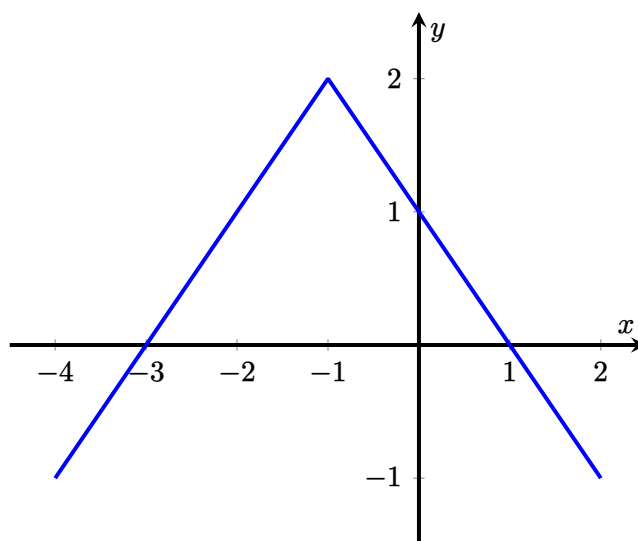
Abyste rovnice měla řešení, musí být $D \geq 0$, tedy $4a - 3 \geq 0$, odkud dostáváme $a \geq 3/4$, obor hodnot je tedy $[3/4, \infty)$.

Poznámka 18. Grafem funkce rozumíme množinu všech bodů $[x, f(x)]$, kde $x \in D(f)$.

Příklad 22. Nakreslete graf funkce $y = 2 - |x + 1|$.

Řešení. Graf této funkce (lomená přímka) bude mít zlomy jen tam, kde má zlomy absolutní

hodnota, tj. v jejích nulových bodech. V tomto případě je to v bodě $x = -1$ (protože pak $x + 1 = 0$, kde se mění znaménko). Stačí tedy určit funkční hodnotu v tomto bodě a v libovolných dvou bodech nalevo a napravo od něj.



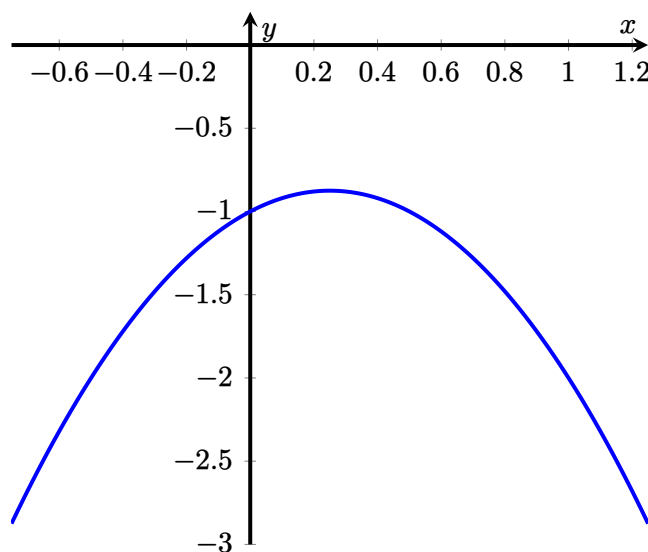
Obrázek 10 – Graf $2 - |x + 1|$

Příklad 23. Nakreslete graf funkce $y = -2x^2 + x - 1$.

Řešení. Doplněním na čtverec získáme:

$$-2x^2 + x - 1 = -2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) = -2 \underbrace{\left(x - \frac{1}{4} \right)^2}_{x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}} - 2 \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{2} \right) = -2 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{7}{8},$$

odkud vidíme, že parabola je rozevřená dolů, je posunutá o $1/4$ doprava a o $7/8$ dolů.



Obrázek 11 – Graf $-2x^2 + x - 1$

Definice 91. Funkce f se nazývá **prostá**, právě tehdy když

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Definice 92. Necht $f : D(f) \rightarrow H(f)$ je prostá funkce. **Inverzní funkcí** k funkci f nazveme funkci $f^{-1} : H(f) \rightarrow D(f)$ takovou, že

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x.$$

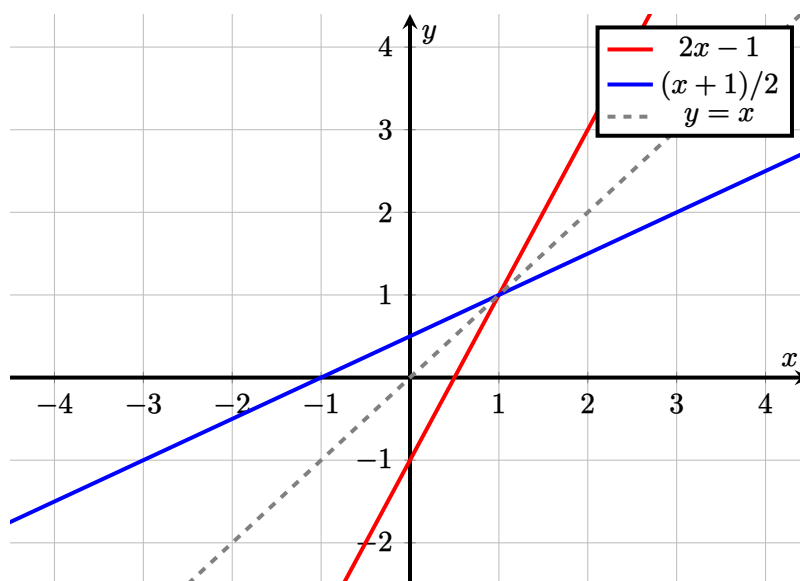
Poznámka 19. Grafy funkce a funkce k ní inverzní jsou souměrné podle přímky $y = x$.

Příklad 24. K funkci $f : y = 2x - 1$ určete f^{-1} a načrtněte grafy obou funkcí.

Řešení. Počítejme

$$\begin{aligned} 2x &= y + 1 \\ f^{-1} : y &= \frac{x + 1}{2}. \end{aligned}$$

Grafy funkcí jsou souměrné podle přímky $y = x$ a mají stejnou monotónnost.



Obrázek 12 – Grafy funkcí $2x - 1$ a $\frac{x+1}{2}$

Definice 93. Funkce f se nazývá **lichá** (resp. **sudá**), jestliže platí

i. $\forall x \in D(f) : -x \in D(f)$ a

ii. $\forall x \in D(f) : f(-x) = -f(x)$, resp. $f(-x) = f(x)$.

Poznámka 20. Graf liché funkce je souměrný podle počátku, graf sudé funkce je souměrný podle souřadné osy y .

Příklad 25. Určete paritu funkce $y = x^2$.

Řešení. Ověříme obě podmínky z definice 93:

- i. $D(f) = \mathbb{R}$ – platí,
- ii. $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ – platí, tedy funkce je sudá.

Definice 94. Necht f je funkce a M alespoň dvouprvková množina z $D(f)$. Řekneme, že funkce f je na množině M

- i. **rostoucí** $\iff \forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$,
- ii. **klesající** $\iff \forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$,
- iii. **neklesající** $\iff \forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$,
- iv. **nerostoucí** $\iff \forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.

Je-li f neklesající nebo nerostoucí, je **monotónní**. Pokud je klesající nebo rostoucí, je **ryze monotónní**.

Příklad 26. Určete monotónnost funkce $y = x^2$ na množině $\mathbb{R}_0^+$.

Řešení. Je-li $x_1, x_2 > 0$, pak $x_1 < x_2 \implies x_1^2 < x_1x_2$. Obdobně $x_1x_2 < x_2^2$. Celkem tedy $x_1^2 < x_2^2 \implies f(x_1) < f(x_2)$, tedy f je rostoucí v $\mathbb{R}_0^+$.

Definice 95. Necht f je funkce, $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce f je na množině M

- i. **shora omezená** $\iff \exists k \in \mathbb{R} : \forall x \in M : f(x) \leq k$,
- ii. **zdola omezená** $\iff \exists k \in \mathbb{R} : \forall x \in M : f(x) \geq k$,
- iii. **omezená** $\iff$ je zdola i shora omezená.

Definice 96. Necht f je funkce, $M \subseteq D(f)$, v ní prvek $a \in M$. Řekneme, že funkce f má v bodě a :

- i. **ostré maximum** na množině M právě tehdy, když $\forall x \in M \setminus \{a\} : f(x) < f(a)$,
- ii. **maximum** (neostré) na množině M právě tehdy, když $\forall x \in M \setminus \{a\} : f(x) \leq f(a)$,
- iii. **ostré minimum** na množině M právě tehdy, když $\forall x \in M \setminus \{a\} : f(x) > f(a)$,
- iv. **minimum** (neostré) na množině M právě tehdy, když $\forall x \in M \setminus \{a\} : f(x) \geq f(a)$.

Definice 97. Necht f je funkce. Funkce f se nazývá **periodická**, pokud $\exists p \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in D(f) :$

1. $x \in D(f) \implies x \pm p \in D(f)$ a
2. $f(x) = f(x \pm p)$.

Číslo p se nazývá **periodou** této funkce. Periodu p_0 nazveme **nejmenší periodou** funkce, pokud pro všechny ostatní periody p platí $p > p_0$. V opačném případě se funkce nazývá **neperiodická**.

Definice 98. Necht máme funkci $f : y = f(u)$ s definičním oborem $D(f)$ a funkci $g : u = g(x)$ s oborem hodnot $H(g)$. Jestliže je $H(g) \subseteq D(f)$, pak funkci $h : y = f(g(x))$ nazveme **složenou funkcí** (někdy píšeme též $h = f \circ g$).

Definice 99. Dirichletova funkce je definována následovně:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Definice 100. Funkce **signum** je definována následovně:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{je-li } x < 0, \\ 0, & \text{je-li } x = 0, \\ 1, & \text{je-li } x > 0. \end{cases}$$

Definice 101. Necht $x \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo. Pak existuje právě jedna dvojice $z \in \mathbb{Z}, a \in \langle 0; 1 \rangle$ tak, že $x = z + a$. Číslo z nazýváme **celou částí** čísla x a zapisujeme $[x] = z$, někdy taky $\lfloor x \rfloor = z$.

Poznámka 21. Pro definici limity a funkce spojitě viz kapitolu 25, dále definici derivace def. 270, funkce konvexní a konkávní def. 276 a konečně definici integrálu def. 280.

Kapitola 7

Polynomy, kořeny polynomů

Definice 102. Polynomem nazýváme každý výraz $P(x)$ tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

kde $a_i \in \mathbb{R}, i \in \{0, 1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$. Čísla a_i se nazývají **koefficienty polynomu**, sčítance $a_i x^i$ **členy polynomu**. Je-li $a_n \neq 0$, číslo n se nazývá **stupeň polynomu** a označuje se $n = \text{st}(P(x))$. Je-li $a_i = 0$ pro všechna $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, pak klademe $\text{st}(P(x)) = -\infty$ a $P(x)$ se nazývá **nulovým polynomem**. Označujeme jej $O(x)$. Je-li $a_n = 1$, nazývá se $P(x)$ **normovaným polynomem**. Množinu všech polynomů s reálnými koeficienty v proměnné x označme $\mathbb{R}[x]$.

Věta 47 (O dělení polynomů se zbytkem). *Nechť $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[x], B(x) \neq O(x)$. Pak existuje právě jedna dvojice polynomů $Q(x), R(x) \in \mathbb{R}[x]$ tak, že*

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

kde $R(x) = O(x)$ nebo $\text{st}(R(x)) < \text{st}(B(x))$.

Definice 103. Nechť $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[x]$. Řekneme, že polynom $A(x)$ **dělí** polynom $B(x)$ právě tehdy, když existuje takový polynom $C(x) \in \mathbb{R}[x]$ tak, že

$$B(x) = A(x) \cdot C(x).$$

Zapisujeme $A(x) \mid B(x)$. V opačném případě říkáme, že $A(x)$ **nedělí** $B(x)$ a píšeme $A(x) \nmid B(x)$.

Definice 104. Nechť $P(x) \in \mathbb{R}[x], P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Nechť $c \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo. (**Funkční**) **hodnotou polynomu $P(x)$ v čísle (v bodě) c** nazýváme reálné číslo $P(c)$

$$P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0.$$

Číslo $c \in \mathbb{R}$ nazveme **kořenem polynomu** $P(x) \iff P(c) = 0$.

Definice 105. Nechť $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ a $c \in \mathbb{R}$ je jeho kořen. Lineární polynom $x - c$ nazveme **kořenovým činitelem**.

Definice 106. Nechť $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $c \in \mathbb{R}$ je jeho kořen a $k \in \mathbb{N}$. Číslo $C \in \mathbb{R}$ nazýváme **k -násobným kořenem** polynomu $P(x)$ právě tehdy, když platí

$$(x - c)^k \mid P(x) \wedge (x - c)^{k+1} \nmid P(x).$$

Věta 48 (Viětovy vztahy). Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n , který má v množině $\mathbb{R}$ právě n kořenů $x_1, x_2, \dots, x_n$ (každý počítáme tolikrát, jaká je jeho násobnost). Pak platí:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ \sum_{i,j=1; i < j}^n x_i x_j &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ &\dots \\ \prod_{i=1}^n x_i &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

Poznámka 22. **Hornerovo schéma** je numerická metoda pro vyhodnocení funkční hodnoty polynomu $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ (resp. ověření, zda je x_0 kořen $P(x)$). Vysvětlení na příkladu:

$$\text{Vyhodnoťte } P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x - 1 \text{ v bodě } x_0 = 3.$$

K výpočtu použijeme následující diagram, kde v prvním řádku jsou koeficienty polynomu, samotné výpočty pak probíhají pod přepsanými koeficienty ve sloupcích, a to následovně: Do prvního místa opíšeme a_n . Další čísla v řádku jsou součty koeficientu a_k nad mezerou a součinu hodnoty x , v níž polynom vyhodnocujeme (v tomto příkladě 3), s číslem v řádku o jeden sloupec vlevo (tedy pod a_{k+1}). Výsledek vyhodnocování $P(x_0)$ je vpravo dole (v tomto příkladě 5).

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -6 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

$$P(3) = 5.$$

Použitím Hornerova schématu jsme zároveň provedli dělení polynomu $P(x)$ se zbytkem lineárním polynomem $x - x_0$ (v tomto příkladě $x - 3$), kde zbytkem je funkční hodnota $P(x_0)$ a podílem je polynom stupně o jedna menšího, jehož koeficienty jsou zbylá vypočtená čísla (v tomto příkladě $2x^2 + 2$).

V případě, že $P(x_0) = 0$ je x_0 kořenem $P(x)$ a zároveň jsme z polynomu vytkli kořenový

činitel $x - x_0$.

Definice 107. (Algebraická) rovnice v reálné neznámé n -tého stupně s jednou neznámou $x \in \mathbb{R}$ je každá rovnice tvaru $P(x) = 0$, kde $P(x)$ je polynom n -tého stupně s reálnými koeficienty.

Věta 49. Nechť je dána algebraická rovnice $a(x) = 0$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (1)$$

$a_n \neq 0$ s celočíselnými koeficienty. Nechť $\frac{r}{s}, r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N}, D(r, s) = 1$ je kořenem této rovnice. Pak platí: $r \mid a_0 \wedge s \mid a_n$.

Věta 50. Nechť $\frac{r}{s}$ je racionální kořen algebraické rovnice 1 s celočíselnými koeficienty. Pak platí:

$$\forall m \in \mathbb{Z} : (r - ms) \mid a(m),$$

kde $a(m)$ je hodnota polynomu $a(x)$ pro $x = m$. Nejčastěji používáme $(r + s) \mid a(-1)$ a $(r - s) \mid a(1)$.

Věta 51 (Hledání racionálních kořenů polynomu s racionálními koeficienty). Mějme polynom $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Potom najdeme jeho kořeny $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ takto:

1. Nalezneme všechny celočíselné dělitele r absolutního členu polynomu a_0 .
2. Nalezneme všechny přirozené dělitele s vedoucího členu a_n .
3. Utvoříme všechny zlomky tvaru $\frac{r}{s}, (r, s) = 1$.
4. Hornerovým schématem určíme $P(1)$, případně $P(-1)$ (1 a -1 také mohou být kořeny).
5. Vyškrtáme ty zlomky $\frac{r}{s}$, které nesplňují podmínky $(r - s) \mid P(1) \wedge (r + s) \mid P(-1)$.
6. U ostatních zlomků vyzkoušíme Hornerovým schématem, zda jsou kořeny daného polynomu.

Příklad 27. Najděte racionální kořeny polynomu $P(x) = \frac{3}{5}x^4 + x^3 + \frac{1}{5}x^2 + x - \frac{2}{5}$.

Řešení. Vynásobme polynom 5, abychom měli všechny koeficienty celé.

$$P(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2.$$

Pak $r \mid a_0 \implies r \mid (-2) \implies r \in \{\pm 2, \pm 1\}$ a $s \mid a_n \implies s \mid 3 \implies s \in \{1, 3\}$. Sestavíme všechny možnosti a vyzkoušíme. S výhodou taky můžeme využít věty 50.

Věta 52 (Rozklad polynomu v reálném a komplexním oboru). Nechť $P(x) \in \mathbb{R}[x]$,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kde $\text{st}(P(x)) \geq 1$. Pak $P(x)$ lze v $\mathbb{R}$ vyjádřit jako součin polynomů 1. a 2. stupně a koeficientu

a_n následovně:

$$P(x) = a_n(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{r_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{r_2} \dots (x^2 + p_tx + q_t)^{r_t},$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_s$ jsou všechny jeho reálné různé kořeny s násobnostmi $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{N}$; $p_1, p_2, \dots, p_t$ a $q_1, q_2, \dots, q_t$ jsou reálná čísla, $r_1, r_2, \dots, r_t \in \mathbb{N}$. Polynomy

$$(x^2 + p_1x + q_1)^{r_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{r_2} \dots (x^2 + p_tx + q_t)^{r_t}$$

jsou kvadratické polynomy se záporným diskriminantem. Uvedený rozklad je až na pořadí činitelů jednoznačný a platí

$$\text{st}(P(x)) = k_1 + k_2 + \dots + k_s + 2(r_1 + r_2 + \dots + r_t).$$

Jestliže $a_1 \pm ib_1, a_2 \pm ib_2, \dots, a_u \pm ib_u$ jsou všechny navzájem různé dvojice komplexně sdružených kořenů s násobnostmi $r_1, r_2, \dots, r_u$, $P(x)$ můžeme v $\mathbb{C}$ psát ve tvaru:

$$P(x) = a_n(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_k)^{k_k} \cdot [(x - a_1)^2 + b_1^2]^{r_1} [(x - a_2)^2 + b_2^2]^{r_2} \dots [(x - a_u)^2 + b_u^2]^{r_u}.$$

Příklad 28. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí

$$P(x) = (x - 1)^2(x + 5)^3x^4(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 1)(x - 5)^5 \geq 0.$$

Řešení. Rozložíme v reálném oboru:

$$P(x) = (x - 1)^2(x + 5)^3x^4(x - 3)(x - 2)(x^2 + 1)(x - 5)^5.$$

Členy se záporným diskriminantem (v tomto případě $x^2 + 1$) nemají reálný kořen, neuvažujeme je tedy. V sudých mocninách se nemění znaménko. Nulové body si zaneseme na číselnou osu a v každém, který je na lichou mocninu, změníme znaménko (dosadíme si nějaké krajní, třeba pro milion). Řešením je tedy $(-\infty, -5) \cup \langle 2, 3 \rangle \cup \langle 5, \infty)$.

Definice 108. Necht $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[x]$. Polynom $C(x) \in \mathbb{R}[x]$ se nazývá **společný dělitel polynomů** $A(x), B(x)$ právě tehdy, když platí: $C(x) \mid A(x) \wedge C(x) \mid B(x)$. Polynom $D(x) \in \mathbb{R}[x]$ se nazývá **největší společný dělitel polynomů** $A(x), B(x)$, který označujeme $D(A(x), B(x))$ nebo $(A(x), B(x))$, právě tehdy, když platí:

- i. $D(x) \mid A(x) \wedge D(x) \mid B(x)$ a
- ii. $\forall C(x) \in \mathbb{R}[x] : C(x) \mid A(x) \wedge C(x) \mid B(x) \implies C(x) \mid D(x)$.

Poznámka 23 (Euklidův algoritmus pro polynomy). Obdobně jako u celých čísel v definici

27 i u polynomů lze pro hledání největšího společného dělitele využít Euklidův algoritmus. Nechť $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[x]$, z nichž alespoň jeden je různý od $O(x)$. Pak mohou nastat dvě možnosti:

- i. $A(x) = O(x) \implies D(A(x), B(x)) = B(x)$ nebo $B(x) = O(x) \implies D(A(x), B(x)) = A(x)$ triviálně;
- ii. $A(x) \neq O(x) \neq B(x)$.

Dále se zabýváme případem ii. Je-li to nutné, přejmenujme polynomy tak, aby $\text{st}(A(x)) \geq \text{st}(B(x))$. Provedme následující posloupnost dělení se zbytkem. Toto dělení ukončíme, až bude zbytek nulový polynom. Vzhledem k nerovnosti na pravé straně tento nulový zbytek existuje.

$$\begin{array}{ll}
 A(x) = B(x) \cdot Q_1(x) + R_1(x), & \text{st}(R_1(x)) < \text{st}(B(x)) \\
 B(x) = R_1(x) \cdot Q_2(x) + R_2(x), & \text{st}(R_2(x)) < \text{st}(R_1(x)) \\
 R_1(x) = R_2(x) \cdot Q_3(x) + R_3(x), & \text{st}(R_3(x)) < \text{st}(R_2(x)) \\
 \dots = \dots & \dots < \dots \\
 R_{n-2}(x) = R_{n-1}(x) \cdot Q_n(x) + R_n(x), & \text{st}(R_n(x)) < \text{st}(R_{n-1}(x)) \\
 R_{n-1}(x) = R_n(x) \cdot Q_{n+1}(x), & R_{n+1}(x) = O(x).
 \end{array}$$

Potom $D(A(x), B(x)) = R_n(x)$ či libovolný násobek $R_n(x)$. **Normovaný největší společný dělitel polynomů** ale existuje právě jeden, ten se označuje $(A(x), B(x))$.

Příklad 29. Určete největšího společného dělitele polynomů

$$x^3 + 8x^2 + 17x + 10, \quad x^3 + 5x^2 + 2x + 10.$$

Řešení. Euklidovým algoritmem. Dělíme tak dlouho, dokud nevyjde nulový zbytek. Mezi jednotlivými děleními můžeme polynomy vynásobit libovolnou konstantou (protože to nezmění kořeny polynomu).

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + 8x^2 + 17x + 10) : (x^3 + 5x^2 + 2x + 10) = 1 \\
 - \quad x^3 - 5x^2 - 2x - 10 \\
 \hline
 3x^2 + 15x
 \end{array}$$

Tento zbytek můžeme pro zjednodušení výpočtu vydělit třemi. Počítejme dále:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + 5x^2 + 2x + 10) : (x^2 + 5x) = x \\
 - \quad x^3 - 5x^2 \\
 \hline
 2x + 10
 \end{array}$$

Tento zbytek opět můžeme vydělit dvěma:

$$\begin{array}{r}
 (x^2 + 5x) : (x + 5) = x \\
 - \quad x^2 - 5x \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Největším společným dělitelem je poslední nenulový zbytek, tj. $x + 5$.

Definice 109. Necht jsou dány polynomy $A(x), B(x)$. Pokud $(A(x), B(x)) = 1$, řekneme, že polynomy $A(x), B(x)$ jsou **nesoudělné**. V opačném případě jsou **soudělné**.

Definice 110. Necht $P(x) \in \mathbb{R}[x], P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. **Derivací polynomu** $P(x)$ rozumíme polynom $P'(x)$ definovaný takto:

$$P'(x) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } \text{st}(P(x)) \leq 0, \\ a_n n x^{n-1} + a_{n-1} (n-1) x^{n-2} + \dots + a_1, & \text{je-li } \text{st}(P(x)) \geq 1. \end{cases}$$

Věta 53. Necht $P(x) \in \mathbb{R}[x], c \in \mathbb{R}$ je jeho k -násobný kořen, $k \in \mathbb{N}$. Pak platí: c je k -násobný kořen $P(x) \iff P(c) = P'(c) = P''(c) = \dots = P^{(k-1)}(c) = 0 \wedge P^{(k)}(c) \neq 0$.

Příklad 30. Je dán polynom $P(x) = x^3 - 3x - 2$, který má dvojnásobný kořen. Určete všechny jeho kořeny.

Řešení. Dvojnásobný kořen je kořenem první derivace (ale ne naopak). Určeme tedy nejprve první derivaci.

$$P'(x) = 3x^2 - 3,$$

kořeny jsou tedy ± 1 . Po zpětném dosazení do $P(x)$ ovšem zjišťujeme, že 1 není kořen $P(x)$ (a -1 ano), proto je -1 dvojnásobným kořenem $P(x)$. Vydělme $P(x)$ polynomem $(x + 1)^2$ v Hornerově schématu:

	1	0	-3	-2
-1	1	-1	-2	0
-1	1	-2	0	

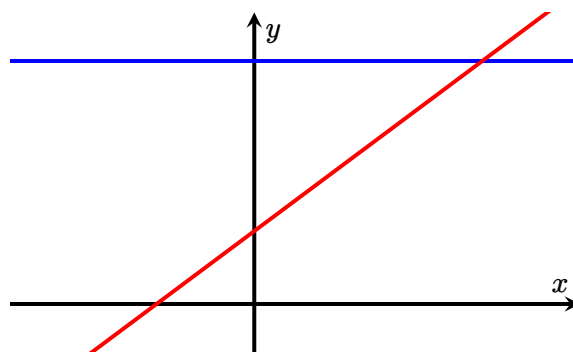
Odtud máme $P(x) = (x + 1)^2(x - 2)$, třetím kořenem je tedy $x = 2$.

Kapitola 8

Polynomická funkce

Definice 111.

- i. Nechť $b \in \mathbb{R}$. Funkci $f : y = b$ nazveme **konstantní funkcí**.
- ii. Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Funkci $f : y = ax + b$ nazveme **lineární funkcí**.



Obrázek 13 – Graf konstantní (modře) a lineární (červeně) funkce

Poznámka 24.

- Definičním oborem konstantní i lineární funkce je $\mathbb{R}$.
Oborem hodnot konstantní funkce je b .
Oborem hodnot lineární funkce je $\mathbb{R}$.
- Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou x .
Grafem lineární funkce je přímka, která není rovnoběžná s osou x ani s osou y .

Věta 54. Nechť $f : y = ax + b, a \neq 0$ je lineární funkce. Pak platí:

- i. $b = 0 \implies f$ je lichá,
 $b \neq 0 \implies f$ není ani sudá, ani lichá;
- ii. $a > 0 \implies f$ je rostoucí,
 $a < 0 \implies f$ je klesající;

iii. f není ani shora, ani zdola omezená;

iv. f nemá extrém;

v. f není periodická.

Důkaz.

i. $b = 0 \Rightarrow f : y = ax = f(x) \wedge -ax = -f(x) \Rightarrow f$ je lichá

$b \neq 0 \Rightarrow f : y = ax + b = f(x) \neq -ax + b \Rightarrow f$ není sudá ani lichá

ii. $a > 0 \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 < ax_2 \Rightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Rightarrow f$ je rostoucí

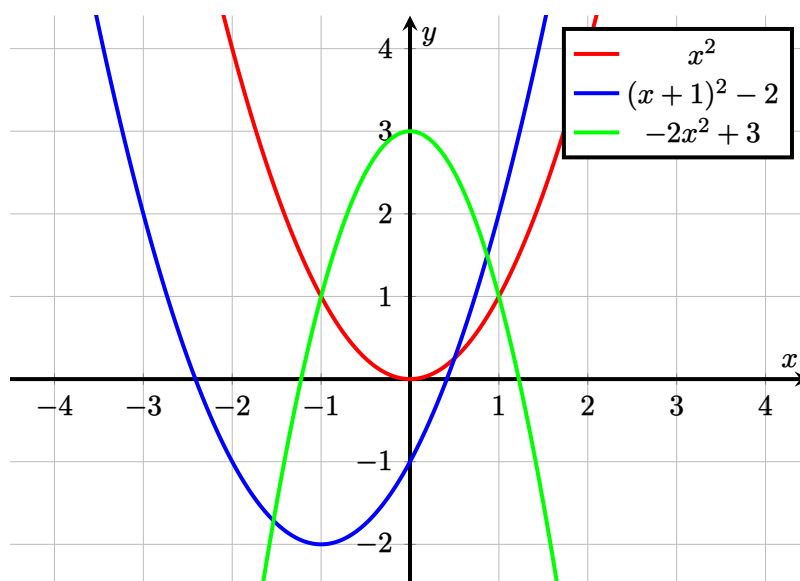
$a < 0 \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 > ax_2 \Rightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \Rightarrow f$ je klesající

iii. Obor hodnot je $\mathbb{R} \Rightarrow f$ není omezená.

iv. Plyne z grafu.

v. Plyne z grafu nebo z toho, že f je ryze monotónní. □

Definice 112. Necht $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Pak funkci $f : y = ax^2 + bx + c$ nazýváme kvadratickou funkcí.



Obrázek 14 – Grafy různých kvadratických funkcí

Poznámka 25.

- Definičním oborem kvadratické funkce je $\mathbb{R}$.
- Grafem kvadratické funkce je parabola.

Věta 55. Necht $f : y = ax^2, a \neq 0$ je kvadratická funkce. Pak platí:

Polynomická funkce

	$a > 0$	$a < 0$
obor hodnot	$H(f) = \mathbb{R}_0^+$	$H(f) = \mathbb{R}_0^-$
parita	sudá	sudá
monotónnost	$x \in (-\infty, 0) - \text{klesající}$ $x \in \langle 0, \infty) - \text{rostoucí}$	$x \in (-\infty, 0) - \text{rostoucí}$ $x \in \langle 0, \infty) - \text{klesající}$
omezenost	zdola omezená shora neomezená	zdola neomezená shora omezená
extrémy	ostré minimum v bodě $x_0 = 0$	ostré maximum v bodě $x_0 = 0$
periodicita	neperiodická	neperiodická

Důkaz. Dokážeme jen paritu a monotonii. Ostatní plyne z grafu.

i. parita: $D(f) = \mathbb{R}$ – platí, $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x) \implies f$ je sudá

ii. monotonie:

- $a > 0 \wedge x \in (-\infty, 0)$:
Je-li $x_1 < x_2$, pak $ax_1^2 > ax_2^2 \iff ax_1 < ax_2 \iff ax_1^2 > ax_1x_2 \wedge ax_1x_2 > ax_2^2 \implies$ platí.
- $a > 0 \wedge x \in \langle 0, \infty)$:
Je-li $x_1 < x_2$, pak $ax_1^2 > ax_2^2 \iff ax_1 < ax_2 \iff ax_1^2 > ax_1x_2 \wedge ax_1x_2 > ax_2^2 \implies$ platí. $\square$

Věta 56. Nechť $f : y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ je kvadratická funkce. Pak platí:

	$a > 0$	$a < 0$
obor hodnot	$H(f) = \left\langle c - \frac{b^2}{4a}, \infty \right\rangle$	$H(f) = \left(-\infty, c - \frac{b^2}{4a} \right]$
parita	obecně není ani sudá, ani lichá	
monotónnost	$x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a} \right) - \text{klesající}$ $x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty \right) - \text{rostoucí}$	$x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a} \right) - \text{rostoucí}$ $x \in \left(-\frac{b}{2a}, \infty \right) - \text{klesající}$
omezenost	zdola omezená shora neomezená	zdola neomezená shora omezená
extrémy	ostré minimum v bodě $x_0 = -\frac{b}{2a}$	ostré maximum v bodě $x_0 = -\frac{b}{2a}$
periodicita	neperiodická	neperiodická

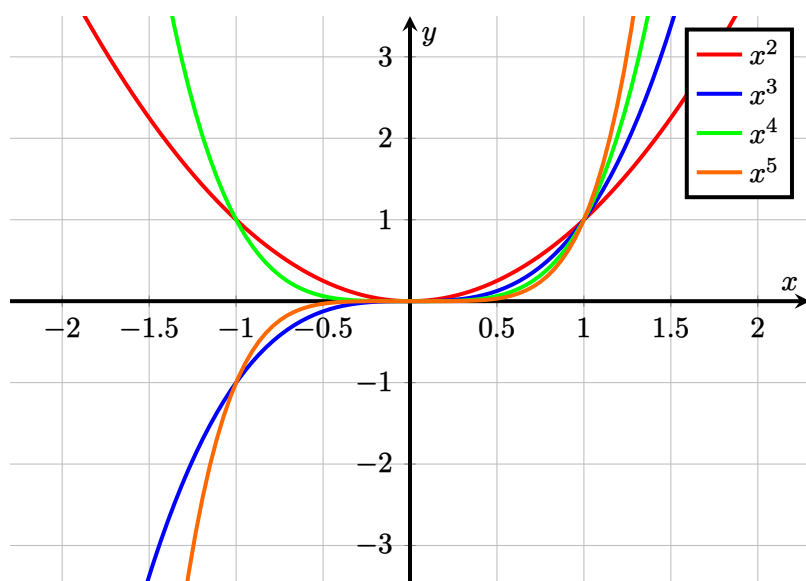
Definice 113. Nechť $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ je polynom. Pak funkci $f : y = P(x)$ nazveme **polynomickou funkcí**.

Poznámka 26.

- i. Definičním oborem polynomické funkce je $\mathbb{R}$.
- ii. Jestliže je stupeň polynomu lichý, pak je obor hodnot $\mathbb{R}$. Jestliže je sudý a $a_n > 0$, je obor hodnot interval $\langle c, \infty)$, v opačném případě je to interval $(-\infty, c]$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Definice 114. Nechť $y = f(x)$ je polynomická funkce. Pak $c \in \mathbb{R}$ nazveme **nulovým bodem** polynomické funkce f právě tehdy, když $f(c) = 0$.

Polynomická funkce



Obrázek 15 – Grafy funkcí tvaru x^n

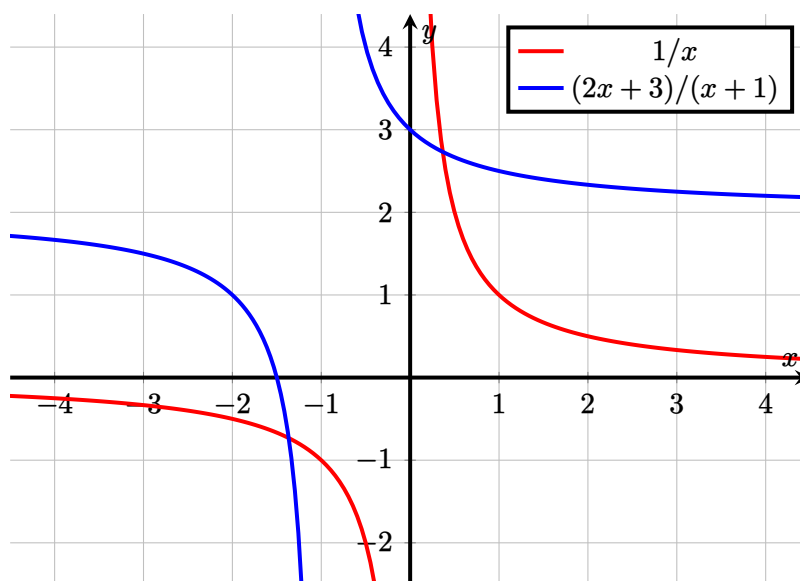
Poznámka 27. Nulovým bodem polynomické funkce rozumíme kořen polynomu.

Kapitola 9

Racionální lomená funkce

Definice 115. Necht $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$. Pak funkci $y = \frac{k}{x}$ nazýváme **nepřímou úměrností** s koeficientem nepřímé úměrnosti k .

Definice 116. Necht $a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0, ad - bc \neq 0$. Pak funkci $f : y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nazýváme **lineární lomenou funkcí**.



Obrázek 16 – Grafy různých lineárně lomených funkcí

Příklad 31. Nakreslete graf funkce $f : y = \frac{2x+3}{x+1}$.

Řešení. Vydělením získáme přehled o posunech počátku:

$$(2x + 3) : (x + 1) = 2 + \frac{1}{x + 1}.$$

Hyperbola je tedy posunutá o dva nahoru a o jedna doleva. Přesvědčit se můžeme v obrázku

??.

Poznámka 28. Pro lineární lomenou funkci platí

- $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$,
- $H(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$,
- grafem je rovnoosá hyperbola s asymptotami $x = -\frac{d}{c}, y = \frac{a}{c}$.

Věta 57. Lineární lomená funkce:

- není ani sudá, ani lichá;
- $bc - ad > 0 \implies$ klesající v $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right), \left(-\frac{d}{c}, \infty\right)$
 $bc - ad < 0 \implies$ rostoucí v $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right), \left(-\frac{d}{c}, \infty\right)$;
- není omezená ani shora, ani zdola;
- nemá extrém;
- není periodická;
- je prostá.

Definice 117. Necht $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ jsou polynomy, $Q(x) \neq 0$. Pak funkci $F : y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ nazýváme **racionální lomenou funkcí**.

Definice 118. Racionální lomená funkce $f : y = \frac{P(x)}{Q(x)}, Q(x) \neq 0$ se nazývá

- ryze lomená** racionální funkce $\iff \text{st}(P(x)) < \text{st}(Q(x))$;
- neryze lomená** racionální funkce $\iff \text{st}(P(x)) \geq \text{st}(Q(x))$.

Příklad 32. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí

$$P(x) = \frac{(x-1)^2(x+5)^3x^4(x^2-5x+6)(x^2+1)(x-5)^5}{(x-3)^3(x^2+7)} \geq 0.$$

Řešení. Rozložíme čitatele i jmenovatele v reálném oboru. Znaménko se obecně mění v kořenech čitatele nebo kořenech jmenovatele. Členy se záporným diskriminantem nemají reálný kořen, neuvažujeme je tedy. V sudých mocninách se nemění znaménko. Zároveň musíme vyloučit samotné kořeny jmenovatele, protože je v nich výraz nedefinován. Toto vše vyneseme na číselnou osu.

Věta 58 (Rozklad na parciální zlomky). Necht $f : y = \frac{P(x)}{Q(x)}, Q(x) \neq 0$ je ryze lomená racionální funkce, kde polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ nemají společné kořeny. Necht

$$Q(x) = a_n(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2} \dots (x-c_l)^{k_l} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{r_1}(x^2+p_2x+q_2)^{r_2} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{r_s}$$

Racionální lomená funkce

je rozklad polynomu $Q(x)$ v reálném oboru. Pak existují čísla

$$\begin{array}{cccc} C_{11}, & C_{12}, & \dots, & C_{1k_1}, \\ C_{21}, & C_{22}, & \dots, & C_{2k_2}, \\ & & \dots & \\ C_{l1}, & C_{l2}, & \dots, & C_{lk_l}; \\ P_{11}, & P_{12}, & \dots, & P_{1r_1}, \\ P_{21}, & P_{22}, & \dots, & P_{2r_2}, \\ & & \dots & \\ P_{s1}, & P_{s2}, & \dots, & P_{sr_s}; \\ Q_{11}, & Q_{12}, & \dots, & Q_{1r_1}, \\ Q_{21}, & Q_{22}, & \dots, & Q_{2r_2}, \\ & & \dots & \\ Q_{s1}, & Q_{s2}, & \dots, & Q_{sr_s} \end{array}$$

tak, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} y = & \left[\frac{C_{11}}{x - c_1} + \frac{C_{12}}{(x - c_1)^2} + \dots + \frac{C_{1k_1}}{(x - c_1)^{k_1}} \right. \\ & + \frac{C_{21}}{x - c_2} + \frac{C_{22}}{(x - c_2)^2} + \dots + \frac{C_{2k_2}}{(x - c_1)^{k_2}} \\ & + \dots \\ & + \frac{C_{l1}}{x - c_l} + \frac{C_{l2}}{(x - c_l)^2} + \dots + \frac{C_{lk_l}}{(x - c_l)^{k_l}} \\ & + \frac{P_{11}x + Q_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{P_{12}x + Q_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{P_{1r_1}x + Q_{1r_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{r_1}} \\ & + \frac{P_{21}x + Q_{21}}{x^2 + p_2x + q_2} + \frac{P_{22}x + Q_{22}}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \dots + \frac{P_{2r_2}x + Q_{2r_2}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{r_2}} \\ & + \dots \\ & \left. + \frac{P_{s1}x + Q_{s1}}{x^2 + p_sx + q_s} + \frac{P_{s2}x + Q_{s2}}{(x^2 + p_sx + q_s)^2} + \dots + \frac{P_{sr_s}x + Q_{sr_s}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{r_s}} \right] \cdot \frac{1}{a_n} \end{aligned}$$

Příklad 33. Rozložte na parciální zlomky: $y = \frac{x-4}{x^2-5x+6}$.

Řešení. Platí

$$\frac{x-4}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$

Metodou porovnání koeficientů tedy řešíme rovnici $x-4 = A(x-3) + B(x-2)$.

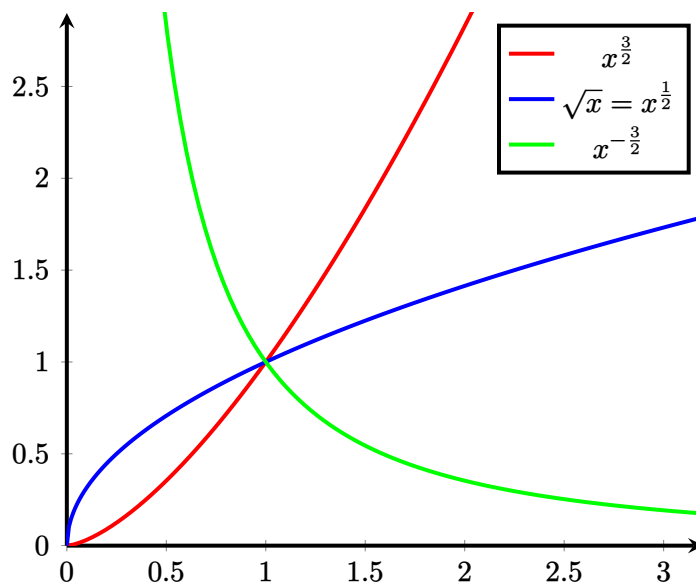
Kapitola 10

Mocniny, mocninná funkce

Definice 119. Necht $n \in \mathbb{N}$. Pak funkci $f : y = x^n$ nazýváme **mocninnou funkcí** s přirozeným exponentem.

Definice 120. Necht $n \in \mathbb{N}$. Pak funkci $f : y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ nazýváme **mocninnou funkcí** s celým záporným exponentem.

Definice 121. Necht $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}^+$. Pak funkci $f : y = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ nazýváme **mocninnou funkcí** s racionálním exponentem.



Obrázek 17 – Grafy různých mocninných funkcí

Věta 59 (Pravidla pro počítání s mocninami). $\forall a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$:

i. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

ii. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$;

iii. $a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0;$

iv. $(a : b)^n = a^n : b^n, b \neq 0;$

v. $(a^m)^n = a^{mn}.$

Důkaz. Zřejmé.

□

Věta 60. *Vlastnosti mocninných funkcí $y = x^n$, kde n je přirozené číslo:*

1. *Pokud n je liché.*

i. $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}.$

ii. *Je lichá.*

iii. *Není omezená shora ani zdola.*

iv. *Je rostoucí v celém svém definičním oboru.*

v. *Nemá maximum, ani minimum.*

2. *Pokud n je sudé.*

i. $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle 0, +\infty \rangle.$

ii. *Je sudá.*

iii. *Není omezená shora, je zdola omezená.*

iv. *Je rostoucí v intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$, je klesající v intervalu $(-\infty, 0)$.*

v. *Nemá maximum, má minimum v bodě 0.*

Věta 61. *Vlastnosti mocninných funkcí $y = x^{-n}$, kde n je přirozené číslo:*

1. *Pokud n je liché.*

i. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

ii. *Je lichá.*

iii. *Není omezená shora ani zdola.*

iv. *Je klesající v $(-\infty, 0)$ a v $(0, +\infty)$.*

v. *Nemá maximum, ani minimum.*

2. *Pokud n je sudé.*

i. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, H(f) = (0, +\infty).$

ii. *Je sudá.*

iii. *Není omezená shora, je zdola omezená.*

iv. *Je rostoucí v intervalu $(-\infty, 0)$, je klesající v intervalu $(0, +\infty)$.*

v. Nemá maximum ani minimum.

Definice 122. Necht $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, x \geq 0$. Pak inverzní funkci k funkci $f : y = x^n$ nazýváme **n -tou odmocninou** a značíme $f^{-1} : y = \sqrt[n]{x}$.

Věta 62 (Pravidla pro počítání s odmocninami). $\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0, m, n \in \mathbb{N} :$

- i. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$;*
- ii. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;*
- iii. $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a : b}$;*
- iv. $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$;*
- v. $\forall k \in \mathbb{N} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[km]{a^k}$.*

Důkaz. Zřejmé.

□

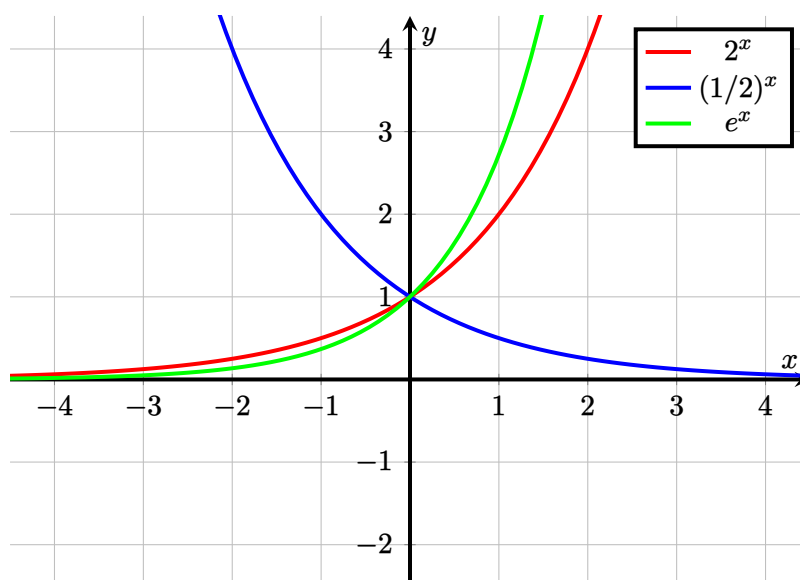
Věta 63. *Vlastnosti odmocninných funkcí $y = \sqrt[n]{x}$, kde n je přirozené číslo větší než jedna:*

- i. Není ani lichá, ani sudá.*
- ii. Je rostoucí.*
- iii. Je zdola omezená.*
- iv. Má ostré minimum v bodě $(0, 0)$.*
- v. Není periodická.*

Kapitola 11

Exponenciální funkce

Definice 123. Necht $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Pak funkci $f : y = a^x$ nazýváme **exponenciální funkcí** o základu a . Funkci $f : y = e^x$ pak nazveme **přirozenou exponenciální funkcí**.



Obrázek 18 – Grafy některých exponenciálních funkcí

Věta 64. Vlastnosti exponenciálních funkcí $y = a^x$, kde a je přirozené číslo:

- i. $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}^+$.
- ii. Graf každé exponenciální funkce prochází bodem $[0, 1]$.
- iii. Není ani sudá, ani lichá.
- iv. Je zdola omezená.
- v. Pro $a > 1$ je rostoucí, pro $a < 1$ je klesající.
- vi. Nemá extrémů a není periodická.

Definice 124. (Ne)rovnice s neznámou v exponentu se nazývá **exponenciální (ne)rovnice**.

Věta 65. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : a^{x_1} = a^{x_2} \iff x_1 = x_2.$

Důkaz. Plyne z toho, že exponenciální funkce je prostá. □

Příklad 34. Určete, pro která $b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ je $f : y = \left(\frac{b}{b-1}\right)^x$ rostoucí a pro která klesající.

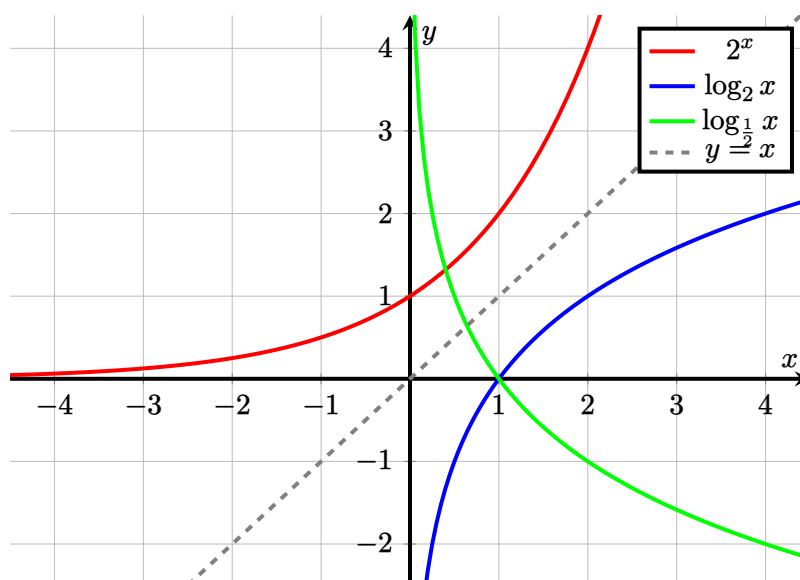
Řešení. Je rostoucí, pokud základ je větší než 1 a klesající, pokud základ je menší než 1. Řešíme tedy

$$\frac{b}{b-1} > 1, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{b}{b-1} < 1.$$

Kapitola 12

Logaritmus, logaritmická funkce

Definice 125. Necht $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Pak inverzní funkci k exponenciální funkci $f : y = a^x$ nazýváme **logaritmickou funkcí** o základu a . Zapisujeme $f^{-1} : y = \log_a x$.



Obrázek 19 – Grafy funkcí $2^x - 1$ a $\frac{x+1}{2}$

Věta 66. Necht je dána logaritmická funkce $f : y = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Pak

- i. $a > 1$: f je rostoucí,
- ii. $a < 1$: f je klesající.

Definice 126. Necht $f : y = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ je logaritmická funkce a $x_0 \in D(f)$. Pak číslo $f(x_0)$ nazýváme **logaritmem** čísla x_0 o základu a .

Poznámka 29. Platí $\log_a b = c \iff a^c = b$.

Vlastnosti logaritmů

Věta 67. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$:

i. $\forall x \in \mathbb{R}^+ : a^{\log_a x} = x,$

ii. $\forall x \in \mathbb{R} : \log_a a^x = x.$

Důkaz.

i. $\log_a x = r \iff a^r = x \iff a^{\log_a x} = x,$

ii. $a^x = r \iff \log_a r = c \iff \log_a a^x = x.$ □

Věta 68. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : \log_a x_1 = \log_a x_2 \iff x_1 = x_2.$

Věta 69. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, b \neq 1$:

i. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c,$

ii. $\log_a b \cdot \log_b a = 1.$

Důkaz.

i. $\log_a b = r \iff a^r = b,$

$\log_b c = s \iff b^s = c,$

$\log_a c = t \iff a^t = c,$

$c = b^s = (a^r)^s,$

$c = a^t,$

$a^{rs} = a^t \implies rs = t \implies \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c,$

ii. $\log_a b \cdot \log_b a = \log_a a = 1.$ □

Věta 70. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, b \neq 1$:

i. $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b},$

ii. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$

Věta 71. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \forall x \in \mathbb{R}^+ :$

i. $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x,$

ii. $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x.$

Důkaz.

i. Necht $\log_{\frac{1}{a}} x = r, \log_a x = s.$ Pak $\left(\frac{1}{a}\right)^r = a^s$, tedy $a^{-r} = a^s$, takže $r = -s.$ Odtud $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x.$

ii. Necht $\log_{\frac{1}{a}} x = r, \log_a x = s.$ Pak $x = \frac{1}{a^r} = a^s$, obdobně $r = -s$, takže $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x.$ □

Věta 72. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+, \forall r \in \mathbb{R} :$

- i. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$
- ii. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$
- iii. $\log_a x^r = r \cdot \log_a x.$

Důkaz. Ve všech případech předpokládejme $\log_a x = s \iff x = a^s, \log_a y = t \iff y = a^t.$

- i. $xy = a^s a^t = a^{s+t},$
 $\log_a(xy) = \log_a(a^{s+t}) = s + t = \log_a x + \log_a y,$
- ii. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(\frac{a^s}{a^t}\right) = \log_a(a^{s-t}) = s - t,$
- iii. $\log_a x^r = \log_a [(x^s)^r] = \log_a a^{rs} = rs = r \cdot \log_a x. \quad \square$

Definice 127. Necht $x \in \mathbb{R}^+.$ **Dekadickým logaritmem** čísla x rozumíme jeho logaritmus o základu 10. Zapisujeme $\log x.$

Věta 73. Necht $m \in \mathbb{R}^+.$ Pak platí

$$\log m = \log m_1 + c,$$

kde $\log m_1 \in \langle 0, 1 \rangle, c \in \mathbb{Z},$ a toto vyjádření je jednoznačné.

Důkaz. $\log m = \log(m_1 \cdot 10^c) = \log m_1 + \log 10^c = \log m_1 + c \quad \square$

Definice 128. Číslo $\log m_1$ z věty 73 nazýváme **mantisou** a číslo c **charakteristikou** čísla $\log m.$

Definice 129. Necht $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$ **Přirozeným logaritmem** čísla x rozumíme logaritmus o základu $e.$ Zapisujeme $\ln x.$

Definice 130. (Ne)rovnice, ve které se vyskytuje logaritmus, se nazývá **Logaritmická (ne)rovnice.** Řešíme je na základě věty 68.

Věta 74. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} :$

- i. pro $a > 1 : a^{x_1} < a^{x_2} \iff x_1 < x_2,$
- ii. pro $a \in (0, 1) : \log_a x_1 < \log_a x_2 \iff x_1 > x_2.$

Věta 75. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ :$

- i. pro $a > 1 : \log_a x_1 < \log_a x_2 \iff x_1 < x_2,$
- ii. pro $a \in (0, 1) : \log_a x_1 < \log_a x_2 \iff x_1 > x_2.$

Kapitola 13

Funkce sinus, kosinus, arkussinus, arkuskosinus

Poznámka 30. Pro definice úhlu a jeho velikosti viz def. 39, 42 a 43.

Definice 131. Orientovaným úhlem $\sphericalangle AVB$ nazýváme úhel s uspořádanou dvojicí polopřímek $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$ se společným počátkem v bodě V . Polopřímku $\overrightarrow{VA}$, resp. $\overrightarrow{VB}$ nazýváme počátečním, resp. koncovým ramenem, bod V vrcholem.

Definice 132. Nechť $\sphericalangle AVB$ je orientovaný úhel o základní velikosti $|\sphericalangle AVB| = \alpha$ dle def. 43. Pak velikostí orientovaného úhlu $\sphericalangle AVB$ rozumíme každé z čísel $\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Definice 133. Nechť je dána jednotková kružnice. Hodnotou funkce **sinus** (resp. **kosinus**) v bodě x nazveme y -ovou (resp. x -ovou) souřadnici průsečíku této kružnice s ramenem úhlu svírajícím s x -ovou osou úhel $\theta = x$.

Věta 76. Vlastnosti funkce *sinus*:

Nechť $k \in \mathbb{Z}$.

- i. $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle -1, 1 \rangle$.
- ii. Je lichá.
- iii. Je rostoucí v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$. a klesající v $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$
- iv. Je omezená.
- v. Maximum má v bodech $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, minimum v bodech $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.
- vi. Je periodická s nejmenší periodou 2π .

Vlastnosti funkce *kosinus*:

- i. $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle -1, 1 \rangle$.
- ii. Je sudá.

iii. Je rostoucí v intervalu $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle$. a klesající v $\langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$

iv. Je omezená.

v. Maximum má v bodech $2k\pi$, minimum v bodech $\pi + 2k\pi$.

vi. Je periodická s nejmenší periodou 2π .

Příklad 35. Určete $\sin \frac{5\pi}{3}$.

Řešení. Počítejme:

$$\sin \frac{5\pi}{3} = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right).$$

Příklad 36. Načrtněte graf funkce $y = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$.

Řešení. Po vytknutí dvojky zjistíme, že funkce je dvojnásobně zhuštěná a posunutá o $\frac{\pi}{6}$ doprava.

Definice 134. Funkce **arkussinus**, označená $f^{-1} : y = \arcsin x$, se nazývá funkce inverzní k funkci $f : y = \sin x$, kde $D(f) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Poznámka 31. Funkce arkussinus má následující vlastnosti:

1. $D(f^{-1}) = \langle -1, 1 \rangle$, $H(f^{-1}) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$,
2. f^{-1} je rostoucí v celém $D(f^{-1})$.

Definice 135. Funkce **arkuskosinus**, označená $g^{-1} : y = \arccos x$, se nazývá funkce inverzní k funkci $g : y = \cos x$, kde $D(g) = \langle 0, \pi \rangle$.

Poznámka 32. Funkce arkuskosinus má následující vlastnosti:

1. $D(g^{-1}) = \langle -1, 1 \rangle$, $H(g^{-1}) = \langle 0, \pi \rangle$,
2. g^{-1} je klesající v celém $D(g^{-1})$.

Věta 77 (Trigonometrická jednička). $\forall x \in \mathbb{R} : \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Věta 78. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB platí:

$$\sin \alpha = \frac{|BC|}{|AB|}, \quad \cos \alpha = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Poznámka 33. **Goniometrická (ne)rovnice** je (ne)rovnice, v níž se vyskytují goniometrické funkce.

Poznámka 34. Grafy jednotlivých funkcí a tabulka se základními hodnotami jsou k nalezení v příloze A.

Kapitola 14

Funkce tangens, kotangens, arkustangens, arkuskotangens

Definice 136. Funkcí **tangens** (resp. **kotangens**) nazýváme funkci danou vztahem:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \text{resp.} \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Věta 79. *Vlastnosti funkce tangens:*

Nechť $k \in \mathbb{Z}$.

- i. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, $H(f) = \mathbb{R}$.*
- ii. Je lichá.*
- iii. Je rostoucí v každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.*
- iv. Není omezená.*
- v. Nemá extrémy.*
- vi. Je periodická s nejmenší periodou π .*

Vlastnosti funkce kotangens:

- i. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $H(f) = \mathbb{R}$.*
- ii. Je lichá.*
- iii. Je klesající v každém z intervalů $(k\pi, (k+1)\pi)$.*
- iv. Není omezená.*
- v. Nemá extrémy.*
- vi. Je periodická s nejmenší periodou π .*

Příklad 37. Vypočítejte $\operatorname{tg}\left(-\frac{19}{6}\pi\right)$.

Definice 137. Funkce **arkustangens**, označená $f^{-1} : y = \operatorname{arctg} x$, se nazývá funkce inverzní k funkci $f : y = \operatorname{tg} x$, kde $D(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Poznámka 35. Funkce arkustangens má následující vlastnosti:

1. $D(f)^{-1} = \mathbb{R}$, $H(f)^{-1} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
2. f^{-1} je rostoucí v celém $D(f^{-1})$.

Definice 138. Funkce **arkuskotangens**, označená $g^{-1} : y = \operatorname{arccotg} x$, se nazývá funkce inverzní k funkci $g : y = \operatorname{cotg} x$, kde $D(g) = (0, \pi)$.

Poznámka 36. Funkce arkuskotangens má následující vlastnosti:

1. $D(g)^{-1} = \mathbb{R}$, $H(g)^{-1} = (0, \pi)$,
2. g^{-1} je klesající v celém $D(g^{-1})$.

Věta 80. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB platí:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|BC|}{|AC|}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

Poznámka 37. Grafy jednotlivých funkcí a tabulka se základními hodnotami jsou k nalezení v příloze A.

Kapitola 15

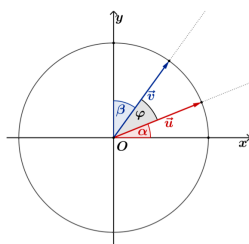
Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Poznámka 38. Věty 81 a 82 musíme umět nazpaměť.

Věta 81 (Součtové vzorce). $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y, \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y.\end{aligned}$$

Důkaz. Nechť jsou dány dva vektory $\mathbf{u} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\mathbf{v} = (\sin \beta, \cos \beta)$, $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, tedy vektor $\mathbf{u}$ svírá s x -ovou osou úhel α a vektor $\mathbf{v}$ svírá s y -ovou osou úhel β . Označme orientovaný úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jako φ . Platí tedy $\alpha + \beta + \varphi = \frac{\pi}{2} \implies \varphi = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$.



Obecně platí $\cos \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$, v našem případě $\cos \varphi = \sin(\alpha + \beta)$. Úhel φ lze spočítat pomocí součinu

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta, \text{ neboť } |\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1.$$

Celkem tedy máme

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \varphi = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

což jsme chtěli dokázat. Pro ostatní případy analogicky. □

Věta 82. $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Důkaz. Plyne jednoduše z věty 81. □

Poznámka 39. Následující vztahy stačí „rychle odvodit“.

Věta 83 (Vyjádření gon. funkce pomocí jiné gon. funkce).

	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
$\sin x$	–	$\sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}}$
$\cos x$	$\sqrt{1 - \sin^2 x}$	–	$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{\operatorname{cotg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	–	$\frac{1}{\operatorname{cotg} x}$
$\operatorname{cotg} x$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$	–

Důkaz. Pro druhý až čtvrtý kvadrant v tabulce plyne z definice.

Vyjádření sinu nebo kosinu pomocí funkce tangens nebo kotangens nalezneme jednoduše ze vztahů v pravoúhlém trojúhelníku. Necht je dán pravoúhlý trojúhelník s přeponou b . Pak $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{c}$, položíme tedy $a = \operatorname{tg} \alpha$ a $c = 1$. Potom z Pythagorovy věty plyne $b = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$. Pak $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}$ a $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}$. Obdobně i pro kotangens. □

Příklad 38. Určete hodnoty všech goniometrických funkcí, je-li dáno $\sin x = \frac{1}{3}$, $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Řešení. Podle vztahů ve větě 83.

Příklad 39. Vypočítejte hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě $\alpha = 105^\circ$.

Řešení. Využijeme toho, že $105 = 60 + 45$, což jsou tabulkové hodnoty, a součtových vzorců.

Věta 84. $\forall x, y, (x \pm y) \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \right\}$:

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

Důkaz. Počítejme:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x + y) &= \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y} \\ &= \frac{\frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y}}{\frac{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}. \end{aligned}$$
□

Věta 85. $\forall x, y, (x \pm y) \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\} :$

$$\cotg(x \pm y) = \frac{\cotg x \cdot \cotg y \mp 1}{\cotg x \pm \cotg y}.$$

Důkaz. Počítejme:

$$\begin{aligned} \cotg(x + y) &= \frac{\cos(x + y)}{\sin(x + y)} = \frac{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y}{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y} \\ &= \frac{\frac{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y}{\sin x \cdot \sin y}}{\frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\sin x \cdot \sin y}} = \frac{\cotg x \cdot \cotg y - 1}{\cotg x + \cotg y}. \end{aligned} \quad \square$$

Věta 86. $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

Důkaz. $\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x$ a $\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 1$

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \frac{x}{2} &= \cos x + 1 & 2 \sin^2 \frac{x}{2} &= 1 - \cos x \\ \cos^2 \frac{x}{2} &= \frac{\cos x + 1}{2} & \sin^2 \frac{x}{2} &= \frac{1 - \cos x}{2} \\ \left| \cos \frac{x}{2} \right| &= \sqrt{\frac{\cos x + 1}{2}} & \left| \sin \frac{x}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \end{aligned} \quad \square$$

Věta 87. $\forall x, y \in \mathbb{R} :$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}, & \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}, \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{x - y}{2}, & \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{x - y}{2}. \end{aligned}$$

Důkaz. Počítejme:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= \sin \left(\frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{2} \right) + \sin \left(\frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{2} \right) \\ &= \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} + \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2} \\ &\quad + \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} - \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2} \\ &= 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}. \end{aligned}$$

V ostatních případech analogicky. □

Příklad 40. Vyjádřete jako součin: $\sin 3y + \sin y$.

Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Řešení. Platí $\sin 3y + \sin y = 2 \sin \frac{3y+y}{2} \cdot \cos \frac{3y-y}{2} = 2 \sin 2y \cdot \cos y$.

Věta 88 (Sinová věta). V každém trojúhelníku ABC platí

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

kde R je poloměr kružnice opsané.

Věta 89 (Kosinová věta). V každém trojúhelníku ABC platí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Věta 90. V každém trojúhelníku ABC platí

$$\frac{abc}{4R} = S = \rho s,$$

kde R je poloměr kružnice opsané a ρ poloměr kružnice vepsané.

Věta 91 (Heronův vzorec). V každém trojúhelníku ABC platí

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde s je polovina obvodu.

Příklad 41. Nalezněte vztah mezi poloměrem kružnice vepsané a opsané trojúhelníku ABC .

Řešení. Zjistíme jednoduše z věty 90.

Příklad 42. Vrchol věže stojící na rovině vidíme z místa A pod výškovým úhlem $\alpha = 39^\circ 28'$.

Přijdeme-li o 50 metrů blíž, je vidět pod úhlem $\beta = 58^\circ 42'$. Jak vysoká je věž?

Řešení. Použitím sinové a kosinové věty.

Kapitola 16

Kombinatorika

Věta 92 (Pravidlo součtu). *Nechť M je konečná množina, $M_1, M_2, \dots, M_k, k \in \mathbb{N}$ její podmnožiny takové, že*

$$i. \quad M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k = M,$$

$$ii. \quad M_i \cap M_j = \emptyset \text{ pro libovolná } i, j \in \{1, 2, \dots, k\}, i \neq j.$$

Pak platí $|M| = |M_1| + |M_2| + \dots + |M_k|$, kde symbolem $|A|$ značíme počet prvků množiny A .

Věta 93 (Pravidlo součinu). *Nechť $M_1, M_2, \dots, M_k, k \in \mathbb{N}$ jsou konečné množiny takové, že $|M_1| = m_1, |M_2| = m_2, \dots, |M_k| = m_k$. Pak platí*

$$|M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k| = m_1 m_2 \dots m_k,$$

kde $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k = \{[a_1, a_2, \dots, a_k]\}, a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_k \in M_k$.

Věta 94 (Dirichletův princip). *Má-li být alespoň $nk + 1$ předmětů rozděleno do k přihrádek, pak alespoň v jedné přihrádce je alespoň $n + 1$ předmětů.*

Definice 139. Nechť M je neprázdná množina. **Rozklad množiny M** značíme $\mathcal{R}(M)$ a definujeme jako neprázdný systém neprázdných podmnožin $M_1, M_2, \dots, M_k, k \in \mathbb{N}$ množiny M , pro které platí

$$i. \quad M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k = M,$$

$$ii. \quad M_i \cap M_j = \emptyset \text{ pro libovolná } i, j \in \{1, 2, \dots, k\}, i \neq j.$$

Množiny $M_1, M_2, \dots, M_k$ nazýváme **třídami rozkladu $\mathcal{R}(M)$** .

Definice 140. Nechť M je konečná n -prvková množina. Uspořádanou n -tici prvků z množiny M , v níž se každý prvek vyskytuje právě jednou, nazveme **pořadím (permutací) prvků** z množiny M . Počet všech pořadí z n prvků označme $P(n)$.

Věta 95. $\forall n \in \mathbb{N} :$

$$P(n) = n(n-1)(n-2) \dots 1. \quad (2)$$

Definice 141. Výraz 2 z věty 95 značíme

$$n(n-1)(n-2) \dots 1 = n!$$

a nazýváme **n -faktoriál**. Pro $n = 0$ položíme $0! = 1$.

Definice 142. Necht je dáno n_1 prvků prvního druhu, n_2 prvků druhého druhu, $\dots$, n_d prvků d -tého druhu, přičemž prvky téhož druhu považujeme za nerozlišitelné. Necht $n_1 + n_2 + \dots + n_d = n$. **Pořadím (permutací) s opakováním** z n_1 prvků prvního druhu, n_2 prvků druhého druhu, $\dots$, n_d prvků d -tého druhu nazveme každou uspořádanou n -tici, která obsahuje n_1 prvků prvního druhu, n_2 prvků druhého druhu, $\dots$, n_d prvků d -tého druhu. Počet všech pořadí označme $P_o(n_1, n_1, \dots, n_d)$.

Věta 96. Necht $n_1, n_2, \dots, n_d \in \mathbb{N}, n, n_1, n_2, \dots, n_d = n$. Pak platí:

$$P_o(n_1, n_1, \dots, n_d) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_d!} = \frac{(\sum_{i=1}^d n_i)!}{\prod_{i=1}^d n_i!}.$$

Příklad 43. Kolik různých slov lze vytvořit z písmen ABRAKADABRA?

Řešení. Máme $5 \times A$, $2 \times B$, $2 \times R$, $1 \times D$ a $1 \times K$. Počítáme tedy $P(5, 2, 2, 1, 1) = \frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!} = 83160$.

Definice 143. Necht M je konečná n -prvková množina. Necht $k \in \mathbb{N}_0, k \leq n$. **k -prvkovou variací** z prvků množiny M nazveme libovolnou uspořádanou k -tici, v níž se každý prvek vyskytuje nejvýše jednou. Počet všech k -prvkových variací z n prvků označme $V(k, n)$.

Věta 97. Necht $k \in \mathbb{N}_0, k \leq n$. Pak platí

$$V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Definice 144. Necht je dáno n_1 prvků prvního druhu, n_2 prvků druhého druhu, $\dots$, n_d prvků d -tého druhu. Necht $k \in \mathbb{N}, k \leq n_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$. **k -prvkovou variací s opakováním** z prvků daných d druhů nazveme každou uspořádanou k -tici vytvořenou z prvků těchto d druhů. Počet těchto variací označme $V_o(k, d)$.

Věta 98. $\forall k, d \in \mathbb{N}$ platí:

$$V_o(k, d) = d^k.$$

Definice 145. Necht M je konečná n -prvková množina. Necht $k \in \mathbb{N}_0, k \leq n$. Libovolnou k -prvkovou podmnožinu množiny M nazýváme **k -prvkovou kombinací prvků z množiny**

M . Počet všech k -prvkových kombinací všech prvků značíme $K(k, n)$.

Věta 99. *Nechť $k, n \in \mathbb{N}_0, k \leq n$. Pak platí*

$$K(k, n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (3)$$

Definice 146. Výraz 3 z věty 99 značíme

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k},$$

čteme „ n nad k “ a nazýváme **kombinačním číslem** (též binomickým koeficientem).

Poznámka 40. Platí

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Příklad 44. *V noclehárně je padesát lůžek. Určete, kolika způsoby se na ně může uložit třicet pět nocležníků.*

Řešení. Rozlišujeme dvě hlediska:

1. hledisko správce ubytovny: je mu jedno, s kým kdo spí $\implies$ kombinace $\binom{50}{35}$,
2. hledisko nocležníků: není jedno, s kým kdo spí $\implies \frac{50!}{15!}$.

Věta 100. $\forall k, n \in \mathbb{N}_0, k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Příklad 45. *Najděte všechna x , pro která platí*

$$\binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 9.$$

Řešení. Řešíme podle věty 100 a podle definice kombinačního čísla.

Definice 147. Nechť je dáno n_1 prvků prvního druhu, n_2 prvků druhého druhu, $\dots$, n_d prvků d -tého druhu. Nechť $k \in \mathbb{N} : k \leq n_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$. **k -prvkovou kombinací s opakováním** z prvků daných d druhů nazveme každou neuspořádanou k -tici vytvořenou z prvků těchto d druhů. Počet všech těchto kombinací označme $K_o(k, d)$.

Věta 101. $\forall k, d \in \mathbb{N} :$

$$K_o(k, d) = P_o(k, d - 1) = \binom{k + d - 1}{d - 1}.$$

Příklad 46. *V obchodě mají čtyři druhy kávy. Kolika způsoby lze pořídit nákup šesti balíčků?*

Řešení. Každý nákup „zašifrujeme“ pomocí uspořádané devítice $(4+6-1)$ tak, že napíšeme tolik jedniček, kolik je prvního druhu a oddělíme nulou, tolik jedniček, kolik je prvků druhého druhu a oddělíme nulou atd., konečně tolik jedniček, kolik je prvků d -tého druhu. Např. 101100111. Jde o bijekci šifry a nákupu. Platí tedy

$$K_o(6, 4) = P_o(6, 3) = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \binom{9}{3}.$$

Příklad 47. *Třicet pět výletníků si vybralo z dvanácti druhů jídel. Kolik existuje různých druhů objednávek?*

Řešení. Rozlišujeme dvě hlediska:

i. hledisko kuchaře: je mu jedno, kdo si co objedná,

$$K_o(35, 12) = P_o(35, 11) = \binom{46}{11}.$$

ii. hledisko číšníka: záleží, kdo si co objedná.

$$V_o(35, 12) = 12^{35}.$$

Příklad 48. *Ve třídě je dvacet chlapců a patnáct dívek. Určete, kolika způsoby z nich lze vybrat šestičlennou delegaci, mají-li zde být*

a. *dvě dívky a čtyři chlapci,*

b. *nejvýše dvě dívky,*

c. *alespoň dvě dívky.*

Řešení. a. Je to

$$\underbrace{\binom{15}{2}}_{\text{dívky}} \cdot \underbrace{\binom{20}{4}}_{\text{chlapci}}.$$

b. Spočítáme zvlášť případy, kdy jedou dvě, jedna nebo žádná dívka a tyto počty sečteme.

c. Opět můžeme zvlášť počítat počty, kdy jede žádná, jedna, atd. dívek, ale jednodušší je vzít celkový počet možností a odečíst počet možností, kdy nejede žádná anebo jede jedna

dívka.

Věta 102 (Binomická věta). Pro všechna $a \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.\end{aligned}$$

Poznámka 41 (Pascalův trojúhelník). Napišme binomická čísla podle schématu níže. Z věty 100 plyne, že každý člen tohoto schématu je součet jeho dvou bezprostředních sousedů nad ním. Navíc jsou čísla v i -tém řádku koeficienty binomického rozvoje $(a+b)^i$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \binom{0}{0} & & & & 1 \\ & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & 1 \quad 1 \\ & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & 1 \quad 2 \quad 1 \\ & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ & & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ & & \dots & & & & & & \dots\end{array}$$

Příklad 49. Sečtěte:

- i* $S_1 = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$
- ii* $S_2 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$
- iii* $S_3 = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots$
- iv* $S_4 = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots$

Řešení. *i.* To je vlastně počet všech podmnožin n -prvkové množiny, tedy $S_1 = 2^n$. Jiným způsobem: po dosazení do binomické věty pro $(1+1)^n$ dostaneme přesně rozvoj S_1 , a proto $S_1 = 2^n$.

ii. Po dosazení do binomické věty pro $(1-1)^n$ dostáváme přesně rozvoj S_2 , takže $S_2 = 0$.

iii. $S_3 = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{(1+1)^n}{2} = 2^{n-1}$

$$iv. S_4 = \frac{S_1 - S_2}{2} = 2^{n-1}$$

Příklad 50. Určete absolutní člen v rozvoji výrazu $(2x^2 - \frac{3}{x})^6$.

Řešení. Exponent u $2x^2$ označme i , exponent u $-\frac{3}{x}$ označme j . Absolutní člen má exponent roven nule, tedy $2i - j = 0$. Navíc v binomické větě platí $i + j = 6$. To je soustava dvou rovnic o dvou neznámých.

Věta 103. Pro všechna $k, n \in \mathbb{N}$ platí

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n}{k+1}.$$

Věta 104 (Princip inkluze a exkluze). Necht $M_1, M_2, M_2, \dots, M_k$ jsou konečné množiny. Pak platí

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^k M_i \right| &= \sum_{i=1}^k |M_i| - \sum_{i=2}^k |M_1 \cap M_i| - \dots - |M_{k-1} \cap M_k| \\ &\quad + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| + \dots + |M_{k-2} \cap M_{k-1} \cap M_k| - \dots \\ &\quad + (-1)^{k+1} |M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k| \\ &= \sum (-1)^{r+1} |M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \dots \cap M_{j_r}|, \end{aligned}$$

kde se sčítá přes všechny neprázdné podmnožiny $\{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ množiny $\{1, 2, \dots, r\}$.

Příklad 51. Určete počet všech pořadí prvků $m_1, m_2, \dots, m_n$ s vlastností, že pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ nestojí prvek m_i na i -tém místě.

Řešení. Označme hledaný počet jako p_n . Pak p'_n je počet všech pořadí, kdy alespoň jeden prvek stojí na svém místě. Platí tedy

$$p_n + p'_n = n! \implies p_n = n! - p'_n.$$

Necht M_i je množina všech pořadí, v nichž prvek m_i stojí na svém místě $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Spočteme počet těchto množin. Stojí-li na svém místě

- jeden prvek (i -tý prvek na i -tém místě), těchto množin je pro daný fixní prvek $|M_i| = (n-1)!$ a tento fixní prvek lze vybrat $\binom{n}{1}$ způsoby,
- dva prvky: těchto množin je pro dané dva fixní prvky $|M_i| = (n-2)!$ a tyto dva fixní prvky lze vybrat $\binom{n}{2}$ způsoby,
- n prvků: tato množina je jedna a lze ji vybrat $\binom{n}{n}$ způsoby.

Celkově tedy máme

$$\begin{aligned} p'_n &= |M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n| = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \dots + (-1)^{n+1}(n-n)! \\ &= \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \binom{n}{r} (n-r)!, \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} p_n &= n! - n! \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \cdot \frac{1}{r!} = n! \left(1 + \sum_{r=1}^n (-1)^r \cdot \frac{1}{r!} \right) \\ &= n! \sum_{r=0}^n (-1)^r \cdot \frac{1}{r!} = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right). \end{aligned}$$

Kapitola 17

Pravděpodobnost

Poznámka 42. Rozlišujeme dva typy pokusů:

- náhodný (předem neznáme výsledek),
- determinovaný (předem známe výsledek).

Definice 148. **Náhodným jevem** rozumíme jakékoliv tvrzení o výsledku náhodného pokusu, o kterém můžeme po provedení říci, zda je nebo není pravdivé.

Definice 149. Necht A, B jsou jevy.

- Řekneme, že **jev A má za důsledek jev B** a zapisujeme $A \subseteq B$ nebo $A \implies B$ právě tehdy, když jev B nastane vždy, když nastane jev A .
- Řekneme, že jevy A a B **jsou si rovny** a zapisujeme $A = B$ právě tehdy, když $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$, tedy B nastane právě tehdy, když nastane A .
- Jev, který nastane při každé realizaci pokusu nazveme jevem **jistým** a označíme Ω . Jev, který nemůže nikdy nastat nazveme jevem **nemožným** a označíme $\emptyset$.

Definice 150. Necht $A_1, A_2, \dots, A_n$ jsou jevy. Pak **sjednocením** (resp. **průnikem**) jevů $A_1, A_2, \dots, A_n$ rozumíme takový jev A , který nastane právě tehdy, když nastane alespoň jeden (resp. všechny z) jevů $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Definice 151. Necht A, B jsou jevy.

- Opačným jevem** k jevu A nazveme takový jev $\bar{A}$, který nastane právě tehdy, když nenastane jev A .
- Rozdílem jevů A, B** nazýváme jev $A - B$, který nastane právě tehdy, když nastane jev A a nenastane jev B .

Definice 152. Jevy nazveme **neslučitelné** (disjunktní), jestliže $A \cap B = \emptyset$.

Definice 153. Nechť je dán náhodný pokus. Jev A nazveme **elementárním jevem** právě tehdy, když neexistují žádné dva jevy B, C ; $A \neq B \neq C$ takové, že $A = B \cup C$, tj. A nelze vyjádřit jako sjednocení dvou jevů různých od A . Množinu všech elementárních jevů nazveme **jevovým polem**. Je to množina všech možných výsledků daného náhodného pokusu. Tuto množinu označíme Ω .

Definice 154. Nechť Ω je konečná neprázdná množina stejně možných výsledků daného náhodného pokusu, tzn. Ω je jevové pole. Nechť $A \subseteq \Omega$ je jev. Označme $|A|$, resp. $|\Omega|$ počet prvků množiny A , resp. Ω . Pak **pravděpodobností** jevu A nazýváme číslo

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Příklad 52. *Házíme dvěma mincemi. Určete pravděpodobnost následujících jevů:*

- a. na obou mincích padne hlava,
- b. aspoň na jedné minci padne orel,
- c. na obou mincích padne totéž.

Řešení. Vypíšeme si všechny možnosti a podělíme ty, které vyhovují, celkovým počtem.

Věta 105. Nechť $A, B \subseteq \Omega$ jsou jevy. Pak

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Definice 155. Nechť $A, B \subseteq \Omega$ jsou jevy. Nazveme je **nezávislé** právě tehdy, když $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Příklad 53. *Zjistěte, zda jsou dané jevy nezávislé.*

- a. Na kostce padne sudé číslo. Na kostce padne 5 nebo 6.
- b. Na kostce padne sudé číslo. Na kostce padne liché číslo.

Řešení. Spočítáme pravděpodobnosti jednotlivých jevů a pravděpodobnost toho, že nastanou oba současně. Pokud je $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, pak jsou nezávislé.

Definice 156. Nechť $A, B \subseteq \Omega$ jsou jevy takové, že $P(B) > 0$. **Podmíněnou pravděpodobností** jevu A za předpokladu nastoupení jevu B nazýváme reálné číslo dané vzorcem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Příklad 54. Házáme dvakrát kostkou. Nechť

$A \dots$ součet obou čísel je dělitelný čtyřmi,

$B \dots$ druhým hodem padne šestka.

Určete $P(A|B)$.

Řešení. Platí

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{3}.$$

Věta 106 (Formule úplné pravděpodobnosti). Nechť $A, B_i \subseteq \Omega, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ jsou jevy takové, že $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i$ a $\forall i \neq j : B_i \cap B_j = \emptyset$. Pak $P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i)$.

Příklad 55. V osudí A jsou dvě černé a tři bílé kuličky. V osudí B jsou dvě černé a jedna bílá kulička. Zvolíme náhodně jedno osudí a vytáhneme jednu kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že je bílá?

Řešení. Označme jevy

$A \dots$ zvolíme osudí A ,

$B \dots$ zvolíme osudí B ,

$X \dots$ vytáhli jsme bílou kuličku.

Pak platí $P(X|A) = \frac{3}{5}, P(X|B) = \frac{1}{3}$. Je tedy

$$P(X) = P(A) \cdot P(X|A) + P(B) \cdot P(X|B) = \frac{7}{15}.$$

Věta 107 (Bayesův vzorec). Nechť $A, B_i \subseteq \Omega, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ jsou takové jevy, že $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i, \forall i, j, i \neq j : B_i \cap B_j = \emptyset$. Nechť $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} : P(B_i) > 0$. Pak platí: $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} :$

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i)}.$$

Příklad 56. Na fakultě studuje 60 % děvčat, z chlapců studuje matematiku 25 %, z děvčat 10 %. Náhodně vybereme studenta/ku studující matiku. Určete pravděpodobnost toho, že to bude dívka.

Řešení. Platí

$$P(D) = 0,6$$

$$P(H) = 0,4$$

$$P(M|D) = 0,1$$

$$P(M|H) = 0,25.$$

Hledáme $P(D \mid M)$. Počítejme

$$P(D) \cdot P(M \mid D) = P(M \cap D) = P(M) \cdot P(D \mid M)$$

$$P(D \mid M) = \frac{P(D) \cdot P(M \mid D)}{P(M)} = \frac{P(D) \cdot P(M \mid D)}{P(D) \cdot P(M \mid D) + P(H) \cdot P(M \mid H)} = \frac{3}{8}.$$

Věta 108 (Bernoulliho věta). *Provádíme-li sérii n nezávislých pokusů, kdy pravděpodobnost příslušného pokusu je p , pak pravděpodobnost toho, že právě k pokusů bude úspěšných, je*

$$P(k, n) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Příklad 57. *Uvažujme n hodů mincí. Jev „padne hlava“ označme Z , „padne orel“ označme N . Určete pravděpodobnost toho, že v sérii sto hodů padne hlava právě padesátkrát.*

Řešení. Platí

$$P = \binom{100}{50} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{50}.$$

Kapitola 18

Stereometrie – polohové vlastnosti

Definice 157. Body ležící na jedné přímce (resp. v jedné rovině) se nazývají **kolineární** (resp. **komplanární**).

Definice 158. Přímky $p, q \in \mathcal{P}$ nazveme:

- i. **různé rovnoběžky**, jestliže $p \cap q = \emptyset \wedge p, q$ jsou komplanární;
- ii. **mimoběžky**, jestliže $p \cap q = \emptyset \wedge p, q$ nejsou komplanární;
- iii. **různoběžky s průsečíkem P** , jestliže $p \cap q = \{P\}$;
- iv. **splývající rovnoběžky**, jestliže $p \cap q = p$.

Věta 109 (Axiom rovnoběžnosti). Každým bodem v $\mathbb{E}_2$ lze vést ke každé přímce právě jednu rovnoběžku.

Definice 159. Roviny $\alpha, \beta \subseteq \mathbb{E}_3$ nazveme:

- i. **rovnoběžné splývající**, jestliže $\alpha = \beta$;
- ii. **rovnoběžné různé**, jestliže $\alpha \neq \beta \wedge \alpha \cap \beta = \emptyset$;
- iii. **různé roviny s průsečnicí p** , jestliže $\alpha \neq \beta \wedge \alpha \cap \beta = p$.

Věta 110 (Kritérium rovnoběžnosti dvou rovin). Necht α, β jsou roviny. Jestliže rovina α obsahuje dvě různoběžky a, b takové, že $a \cap \beta = \emptyset \wedge b \cap \beta = \emptyset$, pak $\alpha \parallel \beta$.

Důkaz. Je-li $\alpha = \beta$, předpoklad tvrzení neplatí, takže implikace platí triviálně.

Dále sporem: Necht $\alpha \not\parallel \beta \implies \alpha \cap \beta \neq \emptyset \implies \exists c = \alpha \cap \beta$. Protože a, b jsou různoběžky, alespoň jedna z těchto přímek protíná přímku c . Necht je to např. a . Pak $a \cap c = \{B\}$. Protože $c \subseteq \beta$, průsečík $B \in \beta \implies \alpha \cap \beta \neq \emptyset$, což je spor s předpokladem $\alpha \cap \beta = \emptyset$. $\square$

Definice 160. Přímku $a \subseteq \mathbb{E}_3$ nazveme s rovinou $\alpha \subseteq \mathbb{E}_3$:

- i. **rovnoběžnou**, jestliže $a \cap \alpha = \emptyset$;
- ii. **různoběžnou**, jestliže $a \cap \alpha = \{P\}$;
- iii. **a leží v rovině** α , jestliže $a \cap \alpha = a$.

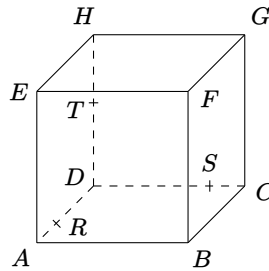
Věta 111 (Kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny). $\forall p \in \mathcal{P}, \forall \rho \subseteq \mathbb{E}_3 : p \parallel \rho \iff \exists q \subseteq \rho : p \parallel q$.

Důkaz. Pokud $p \subseteq \rho \implies q = p$ a tvrzení platí.

Nechť $p \not\subseteq \rho$:

- i. „ $\implies$ “: Nechť $p \parallel \rho \implies p \cap \rho = \emptyset$. Nechť $A \in \rho$ je lib. bod. Potom bodem A a přímkou p je jednoznačně určena rovina σ . $A \in \rho \cap \sigma \implies \rho \cap \sigma = q$, p, q jsou komplanární a mají prázdný průnik $\implies p \parallel q$.
- ii. „ $\impliedby$ “: Sporem: Předpokládejme, že $p \parallel q \wedge p \not\parallel \rho$. $p \parallel q \implies p \cap q = \emptyset \wedge q \subseteq \rho$, p, q leží v téže rovině a $p \neq q \implies p \cap q = \emptyset$, což je spor. $\square$

Příklad 58. Je dána krychle $ABCDEFGH$, na jejích hranách body R, S, T podle obrázku. Určete průsečík přímky DF a roviny RST .



Definice 161. Přímky $p, q \subseteq \mathbb{E}_3$ se nazývají navzájem **kolmé**, právě když existují $p', q' \subseteq \mathbb{E}_3$ takové, že

- i. $p' \parallel p \wedge q' \parallel q$,
- ii. p', q' jsou komplanární,
- iii. $p' \perp q'$.

Poznámka 43. Definice 161 je i kritériem.

Věta 112. Nechť $p, q \subseteq \mathbb{E}_3, p \perp q$. Pak $\forall p', q' \subseteq \mathbb{E}_3 : p' \parallel p, q' \parallel q \implies p' \perp q'$.

Příklad 59. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Bod K je středem EA , L je středem FG . Rozhodněte, zda následující dvojice přímek jsou kolmé:

- a. DH a BC ,
- b. CL a KH .

Řešení. Využijeme věty 112.

a. Triviálně.

b. Jednu z přímek posuneme do roviny té druhé. Pak plyne triviálně.

Definice 162. Nechť $p \subseteq \mathbb{E}_3$ je přímka a $\alpha \subseteq \mathbb{E}_3$ je rovina. Řekneme, že **přímka p je kolmá k rovině α** právě tehdy, když $\forall q \subseteq \alpha : q \perp p$.

Věta 113 (Kritérium kolmosti přímky a roviny). Nechť $p \subseteq \mathbb{E}_3$ je přímka a $\alpha \subseteq \mathbb{E}_3$ je rovina. Pak $p \perp \alpha \iff \exists q, r \subseteq \alpha : q \nparallel r : q \perp p \wedge r \perp p$.

Příklad 60. Nechť je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$. Dokažte, že AB je kolmá k CD .

Řešení. Jednou přímkou proložíme rovinu a dokážeme, že tato rovina je kolmá k druhé přímce. Konkrétně: přímkou CD proložíme rovinu $\overleftrightarrow{SCD}$ (S je střed AB). Pak plyne triviálně.

Definice 163. Řekneme, že **rovina α je kolmá k rovině β** , jestliže $\exists a \subseteq \alpha : a \perp \beta$.

Poznámka 44. Definice 163 je i kritériem.

Poznámka 45. Musíme umět sestavit průsečík přímky a roviny, průsečnici dvou rovin a řez tělesa rovinou.

Definice 164. **Shodným** (resp. **podobným**) **zobrazením** v prostoru (shodností, resp. podobnostmi) nazýváme zobrazení $\mathcal{L} : \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$, jestliže platí

$$\forall X, Y \in \mathbb{E}_3 : |\mathcal{L}(X)\mathcal{L}(Y)| = |XY|, \quad \text{resp.} \quad |\mathcal{L}(X)\mathcal{L}(Y)| = k|XY|, \quad k \in \mathbb{R}^+$$

a číslo k **koefficientem podobnosti**.

Poznámka 46. Shodné zobrazení je podobné zobrazení s koefficientem podobnosti 1.

Definice 165. Nechť $S \in \mathbb{E}_3$ je bod. Pak zobrazení $\mathcal{S}_S : \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ nazýváme **středovou souměrností** se středem S , jestliže

- i. $X = S \implies X = \mathcal{S}_S(X)$,
- ii. $X \neq S \implies S$ je střed $X\mathcal{S}_S(X)$.

Definice 166. $\forall \mathcal{U} \subseteq \mathbb{E}_3 : \mathcal{U} \neq \emptyset$ $\mathcal{U}$ je **útvár**.

Definice 167. $S \in \mathbb{E}_3$ je **střed souměrnosti** útvaru $\mathcal{U}$, jestliže $\exists \mathcal{U} = \mathcal{S}_S(\mathcal{U})$. Útvár je **středově souměrný**, pokud $\exists S : \exists \mathcal{U} = \mathcal{S}_S(\mathcal{U})$.

Definice 168. Nechť α je rovina. Pak zobrazení $\mathcal{S}_\alpha : \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ je **rovinová souměrnost**, jestliže

- i. $X \in \alpha \implies \mathcal{S}_\alpha(X) = X$,

ii. $X \in \alpha \implies X\mathcal{S}_\alpha(X) \perp \alpha \wedge$ střed úsečky $X\mathcal{S}_\alpha(X) \in \alpha$.

Definice 169. Necht A, B jsou dva různé body, $\alpha \subseteq \mathbb{E}_3$ rovina, která prochází středem AB a $AB \perp \alpha$. Pak rovinu α nazýváme **rovinou souměrnosti** bodů A, B .

Definice 170.

- i. α je **rovina souměrnosti** útvaru $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{E}_3$, pokud $\mathcal{U} = \mathcal{S}_\alpha(\mathcal{U})$.
- ii. Útvar $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{E}_3$ je **rovinově souměrný**, jestliže existuje jeho rovina souměrnosti.

Věta 114. Necht $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha : \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ je složené zobrazení dvou rovin souměrných s rovinami $\alpha, \beta \subseteq \mathbb{E}_3$. Necht $\alpha \parallel \beta$, pak $\forall X \in \mathbb{E}_3 : \mathcal{S}_\beta \cap \gamma$, kde γ je taková rovina, že $\alpha \perp \gamma \wedge \beta \perp \gamma, X \in \gamma$.

Definice 171. Složením dvou rovinových souměrností s rovnoběžnými rovinami souměrnosti vznikne zobrazení, které nazýváme **posunutím** v $\mathbb{E}_3$. Směr kolmý k těmto rovinám nazýváme **směr posunutí**.

Definice 172. Složením dvou rovinových souměrností s různoběžnými rovinami souměrnosti vznikne zobrazení, které nazýváme **otočením** v $\mathbb{E}_3$. Průsečnici těchto rovin nazýváme **osu otočení**.

Definice 173. Zobrazením $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{O}_p$, kde $\alpha \perp \beta, p = \alpha \cap \beta$, nazýváme **osovou souměrností** a p **osou** osové souměrnosti.

Definice 174.

- i. p je **osa souměrnosti** útvaru $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{E}_3$, pokud $\mathcal{U} = \mathcal{O}_p(\mathcal{U})$.
- ii. Útvar $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{E}_3$ je **osově souměrný**, jestliže existuje jeho osa souměrnosti.

Definice 175. Necht je dán bod $S \in \mathbb{E}_3$ a číslo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak zobrazení $\mathcal{H}_{S,\lambda} : \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ nazýváme **stejnolehlost**, jestliže $\forall X \in \mathbb{E}_3$ platí:

- i. $X = S \implies X' = X = S$,
- ii. $X \neq S \implies |SX'| = |\lambda| \cdot |SX|$, přičemž
 - a. $\lambda > 0 : X \in \overrightarrow{SX}$,
 - b. $\lambda < 0 : X$ leží na opačné polopřímce k $\overrightarrow{SX}$.

Příklad 61. Sestrojte řez krychle rovinou $\rho = \overleftrightarrow{VWU}$, kde V je střed úsečky AE , W je střed úsečky AB a U je bod hrany CG takový, že $|CU| : |UG| = 2 : 1$.

Kapitola 19

Stereometrie – metrické vlastnosti

Definice 176. Necht $A, B \in \mathbb{E}_3$. **Vzdálenost bodů** A, B nazýváme délku úsečky AB a označujeme $\rho(A, B)$.

Definice 177. Necht $A \in \mathbb{E}_3$ je bod a $\alpha \subseteq \mathbb{E}_3$ je rovina. **Kolmým průmětem** bodu A do roviny α nazýváme bod A_0 splňující

- i. $A \in \alpha \implies A_0 = A$,
- ii. $A \notin \alpha \implies A_0 \in p \cap \alpha, p \perp \alpha, A \in p$.

Vzdáleností bodu A od roviny α nazýváme reálné číslo označené $\rho(A, \alpha)$ a definované

$$\rho(A, \alpha) = \rho(A, A_0) = |AA_0|,$$

kde A_0 je kolmý průmět bodu A do roviny α .

Příklad 62. Určete vzdálenost bodu F od roviny $\overleftrightarrow{BEG}$ v pravidelném čtyřbokém hranolu $ABCDEFGH$, kde $|AB| = |BC| = a, |AE| = b$.

Definice 178. Necht $A \in \mathbb{E}_3$ je bod a $p \subseteq \mathbb{E}_3$ je přímka. **Kolmým průmětem** bodu A na přímku p nazýváme bod A_0 splňující

- i. $A \in p \implies A_0 = A$,
- ii. $A \notin p \implies A_0 \in p \cap q, q \perp p, A \in q$.

Vzdáleností bodu A od přímky p nazýváme reálné číslo označené $\rho(A, p)$ a definované

$$\rho(A, p) = \rho(A, A_0) = |AA_0|,$$

kde A_0 je kolmý průmět bodu A na přímku p .

Definice 179. Necht $\alpha, \beta \subseteq \mathbb{E}_3$ jsou dvě rovnoběžné roviny. Pak **vzdáleností dvou**

rovnoběžných rovin α, β nazýváme reálné číslo označené $\rho(\alpha, \beta)$ a definované

$$\rho(\alpha, \beta) = \rho(A, \beta),$$

kde $A \in \alpha$ je libovolný bod.

Definice 180. Necht $p \subseteq \mathbb{E}_3$ je přímka, $\alpha \subseteq \mathbb{E}_3$ je rovina. Necht $p \parallel \alpha$. **Vzdáleností přímky p od roviny α s ní rovnoběžné** nazýváme reálné číslo označené $\rho(p, \alpha)$ a definované

$$\rho(p, \alpha) = \rho(A, \alpha),$$

kde $A \in p$ je libovolný bod.

Definice 181. Necht $p, q \subseteq \mathbb{E}_3$ jsou rovnoběžné přímky. **Vzdáleností dvou rovnoběžných přímek p, q** nazýváme reálné číslo označené $\rho(p, q)$ a definované

$$\rho(p, q) = \rho(A, q),$$

kde $A \in p$ je libovolný bod.

Definice 182. Necht $p, q \subseteq \mathbb{E}_3$ jsou mimoběžné přímky. **Vzdáleností dvou mimoběžných přímek p, q** nazýváme reálné číslo označené $\rho(p, q)$ a definované

$$\rho(p, q) = \rho(\alpha, \beta),$$

kde $\alpha \parallel \beta, p \subseteq \alpha, q \subseteq \beta$.

Definice 183. Necht $p, q \subseteq \mathbb{E}_3$ jsou dvě komplanární přímky. **Odchylkou dvou komplanárních přímek p, q** nazýváme reálné číslo označené $|\angle p, q|$ a definované

i. je-li $p \parallel q, |\angle p, q| = 0^\circ$,

ii. je-li $p \nparallel q$, odchylka p, q je velikost ostrého nebo pravého úhlu, který p, q svírají.

Věta 115. Necht $p', q'; p, q \subseteq \mathbb{E}_3 : p \parallel p' \wedge q \parallel q'$. Pak platí: $|\angle p'q'| = |\angle pq|$.

Příklad 63. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ s podstavou hranou a a výškou v . Určete odchylku přímek p, q , kde $p = \overleftrightarrow{AV}, q = \overleftrightarrow{CD}$.

Definice 184. Necht $p, q \subseteq \mathbb{E}_3$ jsou dvě mimoběžné přímky. **Odchylkou dvou mimoběžných přímek p, q** nazýváme reálné číslo označené $|\angle p, q|$ a definované

$$|\angle p, q| = |\angle p', q'|,$$

kde $p' \parallel p \wedge q' \parallel q$, kde p', q' jsou komplanární a různoběžné.

Definice 185. Necht $p \subseteq \mathbb{E}_3$ je přímka a $\alpha \subseteq \mathbb{E}_3$ je rovina. **Odchylkou přímky p od roviny α** nazýváme reálné číslo označené $|\angle p, \alpha|$ a definované

- i. je-li $p \parallel \alpha$, $|\angle p, \alpha| = 0^\circ$,
 ii. je-li $p \nparallel \alpha$, odchylka p, α je velikost ostrého nebo pravého úhlu, který svírají přímky p, q , kde q je průsečnice rovin α, β , přičemž $\beta \perp \alpha, p \in \beta$.

Definice 186. Necht $\alpha, \beta \subseteq \mathbb{E}_3$ jsou dvě roviny. **Odchylkou rovin** α, β nazýváme reálné číslo označené $|\angle \alpha, \beta|$ a definované

- i. je-li $\alpha \parallel \beta$, $|\angle \alpha, \beta| = 0^\circ$,
 ii. je-li $\alpha \nparallel \beta$, odchylka α, β je velikost ostrého nebo pravého úhlu, který svírají přímky p, q , kde $p \subseteq \alpha, q \subseteq \beta$ a obě přímky jsou kolmé k průsečnici rovin α, β .

Definice 187. Necht jsou dány nekomplanární body A, B, C, D . Pak **čtyřstěn** je množina bodů ohraničená trojúhelníky $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BCD$. **Pravidelný čtyřstěn** je tvořen čtyřmi stejnými rovnostrannými trojúhelníky.

Definice 188. Mějme v prostoru rovinu ρ , v ní konvexní mnohoúhelník $A_1 \dots A_n$ a necht A'_1 je bod, který v rovině ρ neleží. Necht $T : \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ je takové posunutí, že $A'_1 = T(A_1)$. Při tomto zobrazení se rovina ρ zobrazí na rovinu ρ' , tyto dvě roviny jsou rovnoběžné. Množinu všech bodů X , všech úseček BB' takových, že $B \in A_1 \dots A_n$ a B' je obraz bodu B v posunutí T , nazýváme **hranolem**. Mnohoúhelníky $A_1 A_2 \dots A_n$ a $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ nazýváme **podstavami**, rovnoběžníky $A_i A_{i+1} A'_{i+1} A'_i, i = 1, \dots, n$, nazýváme **bočními stěnami hranolu**. Všechny boční stěny tvoří **plášť hranolu**. Podstavy spolu s bočními stěnami tvoří **stěny hranolu**. Úsečky $A_i A'_i$, resp. $A_i A_{i+1}, A'_i A'_{i+1}$ se nazývají **boční**, resp. **podstavné hrany** hranolu. Body $A_1, A_2, \dots, A_n$ a $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ se nazývají **vrcholy**. Je-li směr posunutí kolmý k rovině podstavy, mluvíme o **hranolu kolmém**, v opačném případě jde o **hranol kosý**.

Definice 189. Hranol, jehož podstavy jsou rovnoběžníky, nazýváme **rovnoběžnostěn**.

Definice 190. Rovnoběžnostěn, jehož všechny stěny jsou pravoúhelníky (resp. čtverce) nazýváme **kvádr** (resp. **krychle**).

Definice 191. Mějme v prostoru rovinu ρ , v ní kruh K ohraničený kružnicí k , na níž leží bod A a necht A' je bod, který v rovině ρ neleží. Necht $T : \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ je takové posunutí, že $A' = T(A)$. Označme $T(\rho) = \rho', T(k) = k', T(K) = K'$. Všechny body všech úseček XX' , kde $X \in K$ a X' je obraz bodu X , vytvoří **válec**. Omezíme-li se pouze na body X ležící na kružnici k , dostaneme **plášť válce**. Kruhy K, K' tvoří **podstavy válce**. Je-li směr posunutí T kolmý k rovině ρ , mluvíme o **kolmém válci**, v opačném případě o **kosém válci**.

Definice 192. Mějme v prostoru rovinu ρ , v ní konvexní mnohoúhelník $A_1 \dots A_n$ a necht V je bod, který v rovině ρ neleží. Úsečky VX , kde X jsou všechny body mnohoúhelníka $A_1 \dots A_n$, nazýváme **jehlanem**. Bod V se nazývá **hlavním vrcholem** jehlanu, jeho další **vrcholy** jsou $A_1, \dots, A_n$. Mnohoúhelník $A_1 \dots A_n$ je **podstava** jehlanu. Trojúhelníky $A_i A_{i+1} V, i = 1, \dots, n - 1$ jsou **bočními hranami** jehlanu. Úsečky $A_i A_{i+1}$ jsou **podstavnými hranami**.

Boční stěny tvoří **plášť** jehlanu. **Jehlan** se nazývá **pravidelný**, jestliže je jeho podstavou pravidelný mnohoúhelník a jeho hlavní vrchol má stejně velké vzdálenosti od všech vrcholů podstavy.

Definice 193. Nechť je dán jehlan s hlavním vrcholem V a podstavou $A_1 \dots A_n$ v rovině ρ . Nechť $k \in \mathbb{R}, k \neq 1, k > 0$. Zavedme $\mathcal{H}_{V,k}(A_1 \dots A_n) = A'_1 \dots A'_n$. Těleso ohraničené podstavami $A_1 \dots A_n, A'_1 \dots A'_n$ a stěnami $A_i A_{i+1} A'_{i+1} A'_i$ se nazývá **komolý jehlan**.

Definice 194. Nechť je dán vrchol V a kruhová podstava K v rovině ρ . Množina všech bodů úseček VX , kde $X \in K$, se nazývá **kužel**. Jestliže $Y \in k$, tvoří body úseček VY **plášť** kužele, kruh K je **podstavou kužele**, bod V **vrcholem** kužele. Je-li $\vec{SV} \perp \rho$, nazývá se **kužel kolmý** (rotační).

Definice 195. Nechť je dán kužel s hlavním vrcholem V a podstavou K v rovině ρ . Nechť $k \in \mathbb{R}, k \neq 1, k > 0$. Zavedme $\mathcal{H}_{V,k}(K) = K'$. Množina všech bodů úseček $X\mathcal{H}(X)$, kde $X \in K$, je **komolý kužel**.

Věta 116. Označme V objem tělesa, S jeho povrch, dále obsahy $S_{\text{pláště}}$, S_{podstavy} , $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektory stran, a, b, c jejich délky. Pak se rovnají:

	V	S	$S_{\text{pláště}}$
prav. čtyřstěn	$\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$	$\sqrt{3} a^2$	
hranol	$S_{\text{podstavy}} \cdot v$	$2S_{\text{podstavy}} + S_{\text{pláště}}$	$O_{\text{podstavy}} \cdot v$
rovnoběžnostěn	$ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} $	z vektorového součinu	
kvádr	abc	$2(ab + bc + ca)$	
krychle	a^3	$6a^2$	
válec	$S_{\text{podstavy}} \cdot v$	$2S_{\text{podstavy}} + S_{\text{pláště}}$	$O_{\text{podstavy}} \cdot v$
jehlan	$\frac{1}{3} \cdot S_{\text{podstavy}} \cdot v$	$S_{\text{podstavy}} + S_{\text{pláště}}$	
komolý jehlan	$\frac{1}{3}(S_{p1} + \sqrt{S_{p1}S_{p2}} + S_{p2}) \cdot v$		
kužel	$\frac{1}{3} \cdot S_{\text{podstavy}} \cdot v$		
komolý kužel	$\frac{1}{3}\pi(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) \cdot v$		
koule	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$	
kulová úseč	$\frac{\pi v^2}{3}(3r - v)$	$\pi v(4r - v)$	
kulový vrchlík		$2\pi r v$	

Věta 117 (Cavalieriho princip). Nechť tělesa T_1, T_2 leží mezi dvěma rovinami ρ_1, ρ_2 a každá rovina $\rho \parallel \rho_1 \parallel \rho_2$ protne tělesa T_1, T_2 v konvexních rovinných útvarech s obsahy P_1, P_2 . Jestliže pro každou rovinu ρ platí $P_1 = P_2$, mají T_1 a T_2 stejný objem.

Definice 196. **Mnohostěn** je konvexní část prostoru, hranice je tvořena konečným počtem mnohoúhelníků.

Věta 118 (Eulerova věta). Nechť s je počet stěn, h počet hran a v počet vrcholů daného tělesa. Pak platí

$$\begin{aligned} s - h + v &= 2, \\ s + v &= h + 2. \end{aligned}$$

Poznámka 47 (Pravidelné mnohostěny).

prav. mnohostěn	tvar stěny	v	s	h	
čtyřstěn	rovnostanný trojúhelník	4	4	6	tetraedr
šestistěn	čtverec	8	6	12	hexaedr
osmistěn	rovnostanný trojúhelník	6	8	12	oktaedr
dvanáctistěn	pravidelný pětiúhelník	20	12	30	dodekaedr
dvacetistěn	rovnostanný trojúhelník	12	20	30	ikosaedr

Příklad 64. *Odvodte vztah pro povrch pláště rotačního kužele o výšce v a poloměru podstavy r .*

Definice 197. O tělesu M v prostoru říkáme, že má p za osu rotace a že je **rotačním tělesem**, jestliže se zobrazí samo na sebe při každém otočení kolem přímky p .

Poznámka 48.

- **rotační válec** – pravoúhelník otáčený kolem své strany,
- **rotační kužel** – pravidelný trojúhelník otáčený kolem odvěsny,
- **koule** – půlkruh nad průměrem, hranice se nazývá **kulová plocha**,
- **torus** – kruh kolem osy, která leží mimo něj

Kapitola 20

Vektorové prostory

Definice 198. Necht $P, X, Q, Y \in \mathbb{E}_3$ jsou čtyři libovolné body. Řekneme, že body P, X, Q, Y tvoří vrcholy zobecněného rovnoběžníku, jestliže střed úsečky PQ splývá se středem úsečky XY .

Definice 199. Na množině $\mathcal{U}$ všech orientovaných úseček s pevným počátečním bodem $P \in \mathbb{E}_3$ definujeme operaci sčítání takto:

$$\forall \overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY} \in \mathcal{U} : \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PQ},$$

je-li bod $Q \in \mathbb{E}_3$ vrcholem zobecněného rovnoběžníku $PXQY$.

Definice 200. Na množině $\mathcal{U}$ všech orientovaných úseček s pevným počátečním bodem $P \in \mathbb{E}_3$ definujeme operaci **násobení orientovaných úseček reálným číslem** (tzv. vnější násobení) takto: je-li $p \in \mathbb{R}$ a $\overrightarrow{PX} \in \mathcal{U}$, pak p -násobkem orientované úsečky $\overrightarrow{PX}$ nazveme orientovanou úsečku $\overrightarrow{PY}$ (a zapisujeme $\overrightarrow{PY} = p \cdot \overrightarrow{PX}$), přičemž platí:

i. $p = 0 \implies Y = P,$

ii. $p \neq 0 \implies Y = \mathcal{H}_{P,p}(X).$

Definice 201. Necht je dána množina G s operací $*$: $G \times G \rightarrow G$ (je na G uzavřená). Pak dvojice $(G, *)$ je **grupa**, jestliže platí:

i. $\forall a, b, c \in G : a * (b * c) = (a * b) * c$ (asociativita),

ii. $\exists e \in G$ takové, že $\forall a \in G : a * e = e * a = a$ (existence neutrálního prvku),

iii. $\forall a \in G : \exists a^{-1} \in G$ takové, že $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (existence inverzního prvku).

Pokud navíc

iv. $\forall a, b \in G : a * b = b * a$ (komutativita),

je $(G, *)$ **komutativní** (též **Abelovská**) **grupa**.

Definice 202. Nechť je dána množina V , těleso T a dvě operace $\oplus : V \times V \rightarrow V$ a $\otimes : T \times V \rightarrow V$ (jsou na V uzavřené). Pak čtveřice $(V, T, \oplus, \otimes)$ je **vektorový prostor** nad tělesem T , jestliže $\forall p, q \in T, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ platí:

- i. $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$ (komutativita sčítání),
- ii. $(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w})$ (asociativita sčítání),
- iii. $\exists \mathbf{o} \in V$ takové, že $\forall \mathbf{u} \in V : \mathbf{u} \oplus \mathbf{o} = \mathbf{o} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{u}$ (existence nulového prvku),
- iv. $\forall \mathbf{u} \in V : \exists (-\mathbf{u}) \in V : \mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) \oplus \mathbf{u} = \mathbf{o}$ (existence opačného prvku),
- v. $p \otimes (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = p \otimes \mathbf{u} \oplus p \otimes \mathbf{v}$ (distributivita),
- vi. $(p + q) \otimes \mathbf{u} = p \otimes \mathbf{u} \oplus q \otimes \mathbf{u}$ (distributivita),
- vii. $(p \cdot q) \otimes \mathbf{u} = p \otimes (q \otimes \mathbf{u})$ (asociativita vnějšího násobení),
- viii. $\exists 1 \in T$ taková, že $\forall \mathbf{u} \in V : 1 \otimes \mathbf{u} = \mathbf{u}$ (existence neutrálního prvku vzhledem k násobení).

Poznámka 49. Výčet prvních čtyř podmínek z definice 202 lze zjednodušit jako: $(V, \oplus)$ je komutativní grupa.

Poznámka 50. Místo znaků $\oplus$ (resp. $\otimes$) píšeme znaky $+$ (resp. $\cdot$). Byly použity, aby bylo jednoznačně odlišeno sčítání vektorů a čísel (resp. násobení vektorů skalárem a násobení čísel). Z kontextu je však jasné zřejmé, kterou operaci použít. V dalším textu budeme již používat znaky $+$ (resp. $\cdot$).

Poznámka 51. V definici jsou skaláry obecně z tělesa (viz poznámku 62). V dalším textu pro jednoduchost uvažujeme $T = \mathbb{R}$.

Poznámka 52. Množina $\mathcal{U}_n$ všech orientovaných úseček s počátečním bodem $P \in \mathbb{E}_n$ je vektorovým prostorem **vázaných vektorů**.

Poznámka 53. Množina $\mathbb{R}^{(n)}$ všech uspořádaných n -tic tvoří **aritmetický** vektorový prostor.

Definice 203. Nechť $A, B, C, D \in \mathbb{E}_n$ jsou body. Řekneme, že orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ jsou **ekvipolentní**, jestliže střed úsečky AD je i středem úsečky BC . Zapisujeme $\overrightarrow{AB} \varepsilon \overrightarrow{CD}$.

Poznámka 54. Pro definici relace ekvivalence viz def. 80, 81 a poznámku 16.

Definice 204. Nechť je dána množina M všech orientovaných úseček v $\mathbb{E}_n$ a relace ekvivalence $\varepsilon \subseteq M \times M$. Pak třída rozkladu množiny M , který přísluší relaci ε , je **volný vektor**.

Definice 205. Nechť V je množina všech volných vektorů v $\mathbb{E}_n$. Pak na množině V definujeme operace sčítání a vnější násobení takto:

i. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$, kde $\mathbf{w} = \{\overrightarrow{XY}; \overrightarrow{XY} \varepsilon \overrightarrow{PC}\}$, kde $\overrightarrow{PA} \in \mathbf{u}, \overrightarrow{PB} \in \mathbf{v}$ a $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$ je součet orientovaných úseček $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$.

ii. $\forall p \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in V : p \cdot \mathbf{u} = \mathbf{z}, \mathbf{z} = \{\overrightarrow{XY}; \overrightarrow{XY} \varepsilon \overrightarrow{PC}\}$, přitom $\overrightarrow{PE} \in \mathbf{u}$ a $\overrightarrow{PF} = p \cdot \overrightarrow{PE}$ je vnější součin orientované úsečky $\overrightarrow{PE}$ a čísla p (tj. pomocí stejnolehlosti).

Definice 206. Nechť $\mathbf{u} \subseteq M$ je libovolný volný vektor a $\overrightarrow{AB} \subseteq \mathbf{u}$ orientovaná úsečka, tedy $u = \{\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \varepsilon \overrightarrow{AB}\}$. Pak orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$ nazveme **umístěním** vektoru $\mathbf{u}$.

Definice 207. Pokud $\overrightarrow{PA} \in \mathbf{u}$, nazýváme orientovanou úsečku $\overrightarrow{PA}$ též reprezentantem vektoru $\mathbf{u}$.

Definice 208. Nechť V je vektorový prostor, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ vektory, $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}$. Vektor

$$\mathbf{x} = p_1 \mathbf{u}_1 + p_2 \mathbf{u}_2 + \dots + p_k \mathbf{u}_k = \sum_{i=1}^k p_i \mathbf{u}_i$$

nazýváme **lineární kombinací** vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

Definice 209. Podmnožina W vektorového prostoru V se nazývá **podprostor** vektorového prostoru V , jestliže W je vektorový prostor.

Definice 210. Množina všech lineárních kombinací vektorů množiny S označená $\langle S \rangle$ se nazývá **lineární obal** množiny S a její prvky **generátory** $\langle S \rangle$.

Příklad 65. Je dán aritmetický vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ a jeho podmnožina $S = \{(1, 2), (4, 3)\}$. Rozhodněte, zda vektor $\mathbf{x} = (7, 4)$ patří do množiny generované S .

Řešení. Vlastně řešíme rovnici $(7, 4) = a(1, 2) + b(4, 3)$.

Definice 211. Nechť $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ je množina vektorů vektorového prostoru V . Množina S je

i. **lineární nezávislá**, jestliže

$$p_1 \mathbf{u}_1 + p_2 \mathbf{u}_2 + \dots + p_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0} \iff p_1 = p_2 = \dots = p_k = 0;$$

ii. **lineárně závislá**, jestliže existuje $p_i \neq 0$ takové, že

$$p_1 \mathbf{u}_1 + p_2 \mathbf{u}_2 + \dots + p_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}.$$

Věta 119 (Kriterium lineární závislosti). Vektory jsou závislé, jestliže alespoň jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Příklad 66. V $\mathbb{R}^{(3)}$ jsou dány vektory $\mathbf{a} = (2, 1, 5)$, $\mathbf{b} = (3, 0, 4)$, $\mathbf{c} = (1, 2, 6)$, $\mathbf{c}' = (1, 2, 5)$. Rozhodněte, zda jsou vektory

a. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$,

b. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}'$

lineárně závislé.

Řešení. Vlastně řešíme rovnici $p\mathbf{a} + q\mathbf{b} + r\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Existuje-li nenulové řešení, jsou lineárně závislé.

Definice 212. Nechť je dán vektorový prostor V . Pak množina $\langle W \rangle$, kde $W \subseteq V$, se nazývá **podprostor** prostoru V **generovaný** množinou W a prvky množiny W **generátory** tohoto podprostoru.

Definice 213. Nechť $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je konečná posloupnost vektorů vektorového prostoru V . Tato posloupnost tvoří **bázi** vektorového prostoru V , jestliže

i. $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou generátory V a

ii. $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé.

Definice 214. Nechť $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ je báze vektorového prostoru V . Pak číslo $k \in \mathbb{N}_0$ je **dimenzí** vektorového prostoru V a píšeme $\dim V = k$.

Příklad 67. Nalezněte dimenzi a bázi vektorového prostoru $\langle S \rangle$ (tj. generovaného množinou S), je-li $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$, kde $\mathbf{u}_1 = (2, 3, 5, -4, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -1, 2, 3, 5)$, $\mathbf{u}_3 = (3, 7, 8, -11, -3)$, $\mathbf{u}_4 = (1, -1, 1, -2, 3)$, $\mathbf{u}_5 = (1, 4, 3, -7, -4)$. Dále vyjádřete vektory $\mathbf{u}_1$ až $\mathbf{u}_5$ jako lineární kombinaci vektorů báze.

Řešení. Vlastně hledáme hodnotu matice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_5 \end{pmatrix}.$$

Gaussovou eliminací pokračujeme tak dlouho, dokud nedostaneme matici do schodovitého tvaru. Řádky takové matice jsou pak generátory $\langle S \rangle$. Vyjadřujeme-li vektor jako lineární kombinaci báze, řešíme vlastně rovnici $\mathbf{u}_i = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + \dots + p_n\mathbf{e}_n$.

Příklad 68. V pravidelném čtyřstěnu $ABCD$ vyjádřete vektory $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AU}$, $\overrightarrow{AT}$ jako lineární kombinaci vektorů $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, je-li S střed strany BC , U těžiště trojúhelníka BCD a T je těžiště $ABCD$.

Definice 215. Nechť $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ je báze vektorového prostoru V . Zobrazení $\varphi : A \rightarrow B$ se nazývá **homomorfismus** vzhledem k operaci $*$, jestliže

$$\forall x, y \in A : \varphi(x * y) = \varphi(x) * \varphi(y).$$

Pokud je φ navíc bijektivní, nazývá se **izomorfismus**.

Poznámka 55. Dva vektorové prostory V, W nad týmž tělesem T jsou izomorfní, jestliže vztah pro zobrazení $\varphi : V \rightarrow W$ z def. 215 platí pro operace sčítání i vnější násobení, tzn. platí:

$$i. \forall x, y \in V : \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}),$$

$$ii. \forall x \in V, \forall p \in T : \varphi(p \cdot \mathbf{x}) = p \cdot \varphi(\mathbf{x}).$$

Definice 216. Nechť $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ je báze vektorového prostoru V . Nechť $\mathbf{x} \in V$ je libovolný vektor takový, že

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n,$$

kde $x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}$. Pak uspořádanou n -tici $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazýváme **souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ v bázi $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$** .

Příklad 69. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{(4)}$ je dána báze

$$\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1, 1), \mathbf{e}_2 = (1, 1, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (1, 1, 0, 0), \mathbf{e}_4 = (1, 0, 0, 0).$$

Určete souřadnice vektoru $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 0)$ v této bázi.

Řešení. Vlastně řešíme rovnici $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 + x_4 \mathbf{e}_4$.

Definice 217. Nechť je dán bod $P \in \mathbb{E}_3$ a báze $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ vektorového prostoru volných vektorů $\mathcal{V}_3$. Pak uspořádaná čtveřice $(P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ je **afinní soustava souřadnic** v $\mathbb{E}_3$ s počátkem P .

Definice 218. Nechť je dán bod $P \in \mathbb{E}_3$ a báze $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ vektorového prostoru volných vektorů $\mathcal{V}_n$ taková, že platí:

Jsou-li $X, Y, Z \in \mathbb{E}_3$ takové body, že $\overrightarrow{PX} \in \mathbf{e}_1, \overrightarrow{PY} \in \mathbf{e}_2, \overrightarrow{PZ} \in \mathbf{e}_3$, souřadné osy $\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY}, \overrightarrow{PZ}$ jsou navzájem kolmé (tedy báze je ortogonální) a jejich velikost je jedna (tedy báze je navíc ortonormální), pak uspořádaná čtveřice $(P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ je **kartézská soustava souřadnic** v $\mathbb{E}_3$ s počátkem P .

Definice 219. Velikostí vektoru $\overrightarrow{AB}$ rozumíme délku úsečky AB a zapisujeme $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$. Vektor o velikosti jedna nazýváme **jednotkovým vektorem**.

Definice 220. Skalární součin je zobrazení $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (označené $\cdot$) s následujícími vlastnostmi:

$$i. \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u},$$

$$ii. (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w},$$

$$iii. (p \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = p \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}),$$

$$iv. \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \geq 0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{o}$$

pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

Věta 120. Pro nenulové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \varphi,$$

kde φ je konvexní úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Definice 221. Vektory jsou **ortogonální** (kolmé), jestliže jejich skalární součin je roven nule.

Definice 222. Množina vektorů je **ortonormální**, jestliže je ortogonální a všechny vektory mají velikost 1.

Věta 121 (Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces). Je dána množina vektorů $M = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$. Hledáme ortogonální bázi $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ generující $\langle M \rangle$.

1. Položme $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1$.

2. k -tý vektor volíme tak, aby

$$\mathbf{e}_k = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 + \dots + p_{k-1} \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{u}_k. \quad (4)$$

Dosažením do (4) dostaneme

$$p_i = -\frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{e}_i}{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i}.$$

(Skalární součiny každých dvou různých bázevých vektorů jsou nula.)

Příklad 70. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{(5)}$ je dán systém generátorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_4$:

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (1, 1, 1, 2, 1), \mathbf{u}_3 = (1, 1, 0, -1, 0), \mathbf{u}_4 = (0, 0, 1, 3, 1).$$

najděte ortogonální a ortonormální bázi tohoto vektorového prostoru.

Řešení. Položme $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1$. Dále $\mathbf{e}_2 = p_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_2$. Po vynásobení této matice $\mathbf{e}_1$ (ten je kolmý na $\mathbf{e}_2$) dostáváme

$$\underbrace{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1}_0 = p_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_1,$$

takže

$$p_1 = -\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1} = -\frac{1}{1} = -1,$$

a pak

$$\mathbf{e}_2 = -1(0, 1, 0, 0, 0) + (1, 1, 1, 2, 1) = (1, 0, 1, 2, 1).$$

Obdobně pak řešíme rovnici $\mathbf{e}_3 = q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}_3$. Vynásobíme ji postupně $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, takže dostaneme dvě rovnice, na jejichž levé straně je součin dvou kolmých vektorů. Obdobně pokračujeme dál. Ortonormální bázi dostaneme tak, že každý z vektorů ortogonální báze vydělíme jeho velikostí.

Příklad 71. Rozhodněte, zda jsou tělesové úhlopříčky krychle navzájem kolmé.

Řešení. Vyjádříme si je jako vektory a spočítáme skalární součin. Pokud je roven nule, jsou kolmé.

Definice 223. Vektorový součin je zobrazení $V \times V \rightarrow V$ (označené $\times$) s následujícími vlastnostmi:

- i. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$,
- ii. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ a $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$,
- iii. $(p \cdot \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = p \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (p \cdot \mathbf{v})$

pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

Příklad 72. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC , je-li $A[-1, 1], B[5, 4], C[2, 7]$.

Řešení. Abychom mohli spočítat vektorový součin (tady polovinu vektorového součinu), musíme mít trojrozměrné vektory. Doplňme je tedy: $A[-1, 1, 0], B[5, 4, 0], C[2, 7, 0]$. Pak je obsah polovina velikosti vektorového součinu dvou vektorů (třeba $\vec{AB}$ a $\vec{BC}$).

Věta 122. Pro každé tři lineárně nezávislé vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ takové, že $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$, platí:

- i. $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin \varphi$, kde φ je úhel, který svárají,
- ii. $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}, \mathbf{w} \perp \mathbf{v}$,
- iii. $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou kladně orientované (v pravotočivé bázi).

Poznámka 56. Velikost vektorového součinu je obsah trojúhelníka, jehož dvě strany jsou násobené vektory.

Definice 224. Pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ je

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

smíšený součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

Kapitola 21

Analytická geometrie lineárních útvarů – polohové vlastnosti

Definice 225. Necht je dána přímka p a vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ takový, že existuje orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ taková, že $A \in p, B \in p$. Pak $\mathbf{u}$ je **směrový vektor** přímky p .

Definice 226. Rovnici $X = A + t\mathbf{u}, t \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, nazveme **parametrickou rovnicí přímky** v $\mathbb{E}_2$, resp. $\mathbb{E}_3$.

Příklad 73. Napište rovnici přímky $p(A, \mathbf{u})$, je-li $A[1, -1, 2], \mathbf{u} = (0, 1, 2)$.

Věta 123 (Určení vzájemné polohy dvou přímek v $\mathbb{E}_2$). Jsou dány přímky $p(A, \mathbf{u}), q(B, \mathbf{v})$.
Pak

i. Jestliže má soustava rovnic

$$a_1 + tu_1 = b_1 + rv_1$$

$$a_2 + tu_2 = b_2 + rv_2$$

a. 0 řešení, jsou přímky p, q rovnoběžné různé.

b. 1 řešení, jsou přímky p, q různoběžné.

c. nekonečně mnoho řešení, přímky p, q splývají.

ii. Jestliže

a. jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ lineárně nezávislé, jsou přímky p, q různoběžné.

b. jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ lineárně závislé a

- $B \in p$, přímky p, q splývají.
- $B \notin p$, přímky p, q jsou rovnoběžné různé.

Příklad 74. Určete vzájemnou polohu dvou přímek AB , CD , je-li $A[3, 2]$, $B[4, -1]$, $C[-4, 5]$, $D[-1, -2]$.

Řešení. Zjišťujeme, zda jsou směrové vektory přímek lineárně závislé.

Věta 124 (Určení vzájemné polohy dvou přímek v $\mathbb{E}_3$). Jsou dány přímky $p(A, \mathbf{u})$, $q(B, \mathbf{v})$. Pak

i. Jestliže má soustava rovnic

$$a_1 + tu_1 = b_1 + rv_1$$

$$a_2 + tu_2 = b_2 + rv_2$$

$$a_3 + tu_3 = b_3 + rv_3$$

a. 0 řešení a vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou

- lineárně nezávislé, jsou přímky p, q mimoběžné.
- lineárně závislé, jsou přímky p, q rovnoběžné různé.

b. 1 řešení, jsou přímky p, q různoběžné.

c. nekonečně mnoho řešení, přímky p, q splývají.

ii. Jestliže

a. jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ lineárně nezávislé a

- $p \cap q \neq \emptyset$, jsou přímky p, q různoběžné.
- $p \cap q = \emptyset$, jsou přímky p, q mimoběžné.

b. jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ lineárně závislé a

- $B \in p$, přímky p, q splývají.
- $B \notin p$, přímky p, q jsou rovnoběžné různé.

Příklad 75. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek $p = \{[1 - 4t, 2 + 4t, 3 + t], t \in \mathbb{R}\}$, $q = \{[-4, 8r, -5 - 8r, -2r], r \in \mathbb{R}\}$.

Řešení. Zjišťujeme, zda jsou směrové vektory přímek lineárně závislé.

Věta 125 (Vzájemná poloha dvou přímek). Necht $p(A, \mathbf{u})$, $q(B, \mathbf{v})$ jsou dvě přímky. Pak platí

$$i. p \parallel q \wedge p = q \iff \dim(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{AB}) = 1,$$

$$ii. p \parallel q \wedge p \neq q \iff \dim(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{AB}) = 2 \wedge \dim(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1,$$

$$iii. p, q \text{ jsou různoběžné} \iff \dim(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{AB}) = 2 \wedge \dim(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2,$$

$$iv. p, q \text{ jsou mimoběžné} \iff \dim(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{AB}) = 3.$$

Příklad 76. Rozhodněte o vzájemné poloze dvou přímek $p = \{[t, -1 + 2t, -2 + 2t], t \in \mathbb{R}\}$, $q = \{[1 + t, 1, r], r \in \mathbb{R}\}$.

Řešení. Je $\mathbf{u} = (1, 2, 2), \mathbf{v} = (1, 0, 1), \overrightarrow{AB} = (1, 2, 2)$. Hledáme tedy dimenzi prostorů $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{AB} \rangle$.

Definice 227. $ax + by + c = 0, (a, b) \neq (0, 0)$ je **obecná rovnice přímky** v $\mathbb{E}_2$.

Definice 228. Vektor kolmý ke směrovému vektoru přímky se nazývá **normálový**.

Věta 126. Normálový vektor přímky o rovnici $ax + by + c = 0$ je $\mathbf{n} = (a, b)$.

Příklad 77. Napište obecnou rovnici přímky $p = \{[1 + t, 2 - t], t \in \mathbb{R}\}$.

Řešení. Buď vyloučením parametru: je-li $x = 1 + t, y = 2 - t$, pak $x + y = 3$, takže $x + y - 3 = 0$, nebo přes normálový vektor: $\mathbf{n}(1, 1)$, takže dosadíme do rovnice a dopočteme c tak, aby jí lib. bod přímky p vyhovoval.

Příklad 78. Napište parametrickou rovnici přímky $x - 2y + 1 = 0$.

Řešení. Buď substitucí, např. $y = t$, pak $x - 2t + 1 = 0$, takže $x = -1 + 2t$, tedy $p = \{[-1 + 2t, t], t \in \mathbb{R}\}$, nebo přes normálový vektor.

Definice 229. Rovnice $y = kx + q$ se nazývá **směrnice tvar rovnice přímky** v $\mathbb{E}_2$, k je **směrnice** přímky.

Definice 230. Rovnice $\frac{x}{q} + \frac{y}{p} = 1$ se nazývá **úsekový tvar rovnice přímky** v $\mathbb{E}_2$.

Definice 231. Nechť ρ je rovina, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ lineárně nezávislé vektory a $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, A, B, C \in \rho$ jejich umístění. Pak $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ je **zaměření roviny** ρ .

Definice 232. Rovnice $X = A + r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ se nazývá **parametrická rovnice roviny**.

Definice 233. $ax + by + cz + d = 0, (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ se nazývá **obecná rovnice roviny**.

Definice 234. Vektor kolmý k oběma směrovým vektorům roviny se nazývá **normálový**.

Příklad 79. Napište obecnou rovnici roviny $\rho = \overleftrightarrow{ABC}, A[1, 1, 1], B[2, 0, -1], C[1, 0, 0]$.

Řešení. Opět buď vyloučením parametrů, nebo přes normálový vektor: spočítáme dva libovolné vektory mezi body A, B, C a $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, posun dopočteme.

Příklad 80. Napište parametrickou rovnici roviny $\rho : x - y + z - 1 = 0$.

Řešení. Pokud $y = r, z = s$, pak $x - r + s - 1 = 0$, takže $x = 1 + r - s$, tedy $\rho = \{[1 + r - s, r, s], r, s \in \mathbb{R}\}$.

Věta 127 (Vzájemná poloha dvou rovin daných obecnými rovnicemi). *Nechť $\rho : ax + by + cz + d = 0, \sigma : ex + fy + gz + h = 0$ jsou roviny. Pak*

- i. $\rho = \sigma \iff (a, b, c, d) = k(e, f, g, h), k \in \mathbb{R},$
- ii. $\rho \parallel \sigma \wedge \rho \neq \sigma \iff (a, b, c) = k(e, f, g), k \in \mathbb{R} \wedge d \neq kh,$
- iii. $\rho \nparallel \sigma \iff \forall k \in \mathbb{R} : (a, b, c) \neq k(e, f, g).$

Příklad 81. Určete vzájemnou polohu roviny $\rho : 2x + 3y + 4z + 5 = 0, \sigma : x - y - z + 1 = 0$.

Řešení. Normálové vektory jsou lineárně nezávislé. Průsečnice je řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z + 5 &= 0, \\ x - y - z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Věta 128 (Vzájemná poloha dvou rovin daných parametrickými rovnicemi). *Nechť jsou dány roviny $\rho(A, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ a $\sigma(B, \mathbf{k}, \mathbf{l})$. Pak*

- i. $\rho = \sigma \iff \dim(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = 2 \wedge \dim(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}, \mathbf{l}, \overrightarrow{AB}) = 2,$
- ii. $\rho \parallel \sigma \wedge \rho \neq \sigma \iff \dim(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = 2 \wedge \dim(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}, \mathbf{l}, \overrightarrow{AB}) = 3,$
- iii. $\rho \nparallel \sigma \iff \dim(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = 3.$

Příklad 82. Určete vzájemnou polohu rovin $\rho = \{[4 + t_1 + 2t_2, 5 + 2t_1, 3 + 2t_1 + 2t_2], t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}, \sigma = \{[1 + 2r_1 + r_2, -2 - 2r_1 - 2r_2, 1 + r_1], r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}.$

Řešení. Hledáme dimenzi prostorů $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}, \mathbf{l} \rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}, \mathbf{l}, \overrightarrow{AB} \rangle.$

Věta 129 (Vzájemná poloha přímky a roviny dané parametrickou rovnicí). *Nechť $p(A, \mathbf{u}), \rho(B, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ jsou přímka a rovina. Pak*

- i. $p \subseteq \rho \iff \dim(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = 2 \wedge \dim(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{l}, \overrightarrow{AB}) = 2,$
- ii. $p \parallel \rho \wedge p \not\subseteq \rho \iff \dim(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = 2 \wedge \dim(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{l}, \overrightarrow{AB}) = 3,$
- iii. $p \nparallel \rho \iff \dim(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = 3.$

Příklad 83. Určete vzájemnou polohu přímky $p = \{[3 + t, 1 + 2t, 2 - t], t \in \mathbb{R}\}$ a roviny $\rho : \{[1 - 3r + s, 2r - s, 1 + 4r - s], r, s \in \mathbb{R}\}.$

Řešení. Hledáme dimenzi prostorů $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \overrightarrow{AB} \rangle.$

Věta 130 (Vzájemná poloha přímky a roviny dané obecnou rovnicí). *Nechť $p(A, \mathbf{u}), \rho : ax + by + cz + d = 0$ jsou přímka a rovina. Pak*

- i. $p \subseteq \rho \iff \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \wedge A \in p,$
- ii. $p \parallel \rho \wedge p \not\subseteq \rho \iff \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \wedge A \notin p,$

iii. $p \nparallel \rho \iff \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \neq 0$.

Příklad 84. Určete vzájemnou polohu přímky $p = \{[1-t, 1+3t, -3], t \in \mathbb{R}\}$ a roviny $\rho : 3x + y + 5z + 7 = 0$.

Řešení. Počítáme skalární součin směrového vektoru přímky a normálového vektoru roviny.

Definice 235. Necht p, q jsou dvě mimoběžné přímky. Přímka r , která je různoběžná s přímkami p, q se nazývá **příčkou mimoběžek** p, q . Pokud je navíc r kolmá na p, q , nazývá se **osou mimoběžek** p, q .

Příklad 85. Jsou dány mimoběžky $p(A, \mathbf{u})$ $q(B, \mathbf{v})$ a dále vektor $\mathbf{w}$, přičemž $A[1, -2, 5]$, $B[-1, 1, -5]$, $\mathbf{u} = (1, 3, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{w} = (1, 1, 4)$. Nalezněte příčku p, q , která je rovnoběžná s vektorem $\mathbf{w}$.

Řešení. Necht $P = A + k\mathbf{u}$, $Q = B + l\mathbf{v}$. Pak $\overrightarrow{PQ} = Q - P = B + l\mathbf{v} - A - k\mathbf{u} = x\mathbf{w}$, úpravou dostaneme $\overrightarrow{AB} = -l\mathbf{v} + k\mathbf{u} + x\mathbf{w}$. Máme tedy soustavu tří rovnic o třech neznámých.

Příklad 86. Jsou dány mimoběžky $p(A, \mathbf{u})$, $q(B, \mathbf{v})$ a bod M , přičemž $A[1, 5, 2]$, $B[0, -1, 1]$, $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 1, 0)$, $M[0, 1, -5]$. Nalezněte příčku p, q , která prochází bodem M .

Řešení. Obdobně jako v příkladu 85 dostaneme $\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MB} + m\mathbf{v} - k\mathbf{u}$, tedy $A - M = x(B - M) + m\mathbf{v} - k\mathbf{u}$. Máme tedy soustavu tří rovnic o třech neznámých.

Kapitola 22

Analytická geometrie lineárních útvarů – metrické vlastnosti

Definice 236. Necht $A, B \subseteq \mathbb{E}_3$ jsou dva podprostory $\mathbb{E}_3$. **Vzdáleností podprostorů** A, B nazveme nezáporné reálné číslo $\rho(A, B)$ definované takto:

$$\rho(A, B) = \min\{|XY| : X \in A, Y \in B\},$$

kde $|XY|$ je délka úsečky XY .

Věta 131. *Vzdálenost dvou bodů A, B je délka úsečky AB .*

Věta 132. *Necht $A[a_1, a_2] \in \mathbb{E}_2$ je bod, $p : ax + by + c = 0$ je přímka. Pak*

$$\rho(A, p) = \frac{|aa_1 + ba_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Poznámka 57. *Vzdálenost bodu A od přímky p v $\mathbb{E}_3$ řešíme třeba vyjádřením délky úsečky AX , kde X je nějaký bod na přímce p a nalezením jejího minima.*

Příklad 87. *Určete $\rho(A, p)$, $A[1, 0, 1]$, $p = \{[2 - t, t, 0], t \in \mathbb{R}\}$.*

Řešení. Přímka $p = p(P, \mathbf{u})$, kde $P[2, 0, 0]$, $\mathbf{u}(-1, 1, 0)$.

1. způsob: Necht $A_0 = [2 - t^*, t^*, 0]$. Pak $\mathbf{n} = \overrightarrow{AA_0} = A_0 - A = (1 - t^*, t^*, -1)$. Platí $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, tedy $t^* = -\frac{1}{2}$, odtud $A_0[1, 5; 0, 5; 0]$. *Vzdálenost $\rho(A, p)$ je pak $|\overrightarrow{AA_0}|$.*
2. způsob: Najdeme takovou rovinu, která je kolmá na přímku p a leží na ní bod A (normálový vektor roviny je tedy směrový vektor přímky). Dále najdeme průsečík přímky p s hledanou rovinou – vzdálenost dvou bodů už počítat umíme.
3. způsob: Libovolný bod X na přímce p má souřadnice $[2 - t, t, 0]$. Hledáme minimum velikosti vektoru $\overrightarrow{AX}$.

Věta 133. *Nechť $A[a_1, a_2, a_3] \in \mathbb{E}_3$ je bod, $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ je rovina. Pak*

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Věta 134. *Nechť $p : ax + by + c = 0, q : ax + by + d = 0$ jsou dvě rovnoběžné přímky. Pak*

$$\rho(p, q) = \frac{|d - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Poznámka 58. Při hledání vzdálenosti dvou rovnoběžných přímek v $\mathbb{E}_3$ na jedné z nich zvolíme libovolný bod a dále pokračujeme podle příkladu 87.

Poznámka 59. Při hledání vzdálenosti přímky od roviny s ní rovnoběžné na přímce zvolíme libovolný bod a dále pokračujeme podle věty 133.

Věta 135. *Nechť $\alpha : ax + by + cz + d = 0, \beta : ax + by + cz + e = 0$ jsou dvě rovnoběžné roviny. Pak*

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{|e - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Poznámka 60. Vzdálenost mimoběžných přímek určujeme buď pomocí normálového vektoru rovin, ve kterých přímky leží a následně podle věty 135, nebo určením osy mimoběžek.

Příklad 88. *Určete vzdálenost mimoběžných přímek $p = \{[9 + 4t, -2 - 3t, t], t \in \mathbb{R}\}$, $q = \{[-2r, -7 + 9r, 2 + 2r], r \in \mathbb{R}\}$.*

Řešení. 1. způsob: Směrové vektory mimoběžek určují rovinu. Jedna obsahuje přímku p a druhá, která je s ní rovnoběžná, obsahuje přímku q . Dále počítáme podle vzorce.
2. způsob: Hledáme příčku mimoběžek, která je rovnoběžná s vektorem, který získáme jako vektorový součin směrových vektorů přímek p, q .

Příklad 89. *Určete rovnici přímky, která prochází bodem $A[-2, 1]$ a od bodu $[3, 1]$ má vzdálenost 4.*

Řešení. Hledáme přímku tvaru $ax + by + c = 0$. Jistě platí $-2a + b + c = 0$ a vzorec pro vzdálenost přímky a roviny. Máme tři neznámé, ale jen dvě rovnice. Proto jednu z nich zvolíme (musíme uvažovat nulové a nenulové řešení) a zbylé dvě dopočítáme.

Příklad 90. *Určete rovnici přímky, která prochází bodem $A[1, 2]$ a má stejnou vzdálenost od bodů $B[3, 3], C[5, 2]$.*

Řešení. Hledáme přímku $p : ax + by + c = 0$. Protože $A \in p$, platí $a + 2b + c = 0$. Protože

má stejnou vzdálenost od bodů B a C , platí navíc

$$\frac{|3a + 3b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5a + 2b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

S výhodou druhou rovnici upravíme za použití té první na $|2a + b| = |4a|$. Dále už řešíme soustavu rovnic, přičemž jsou buď obě absolutní hodnoty kladné, nebo jedna z nich záporná (ostatní případy nám dají stejný vektor o opačné orientaci). Jednu z proměnných zvolíme.

Definice 237. **Odchylka** vektorů je úhel, který dané vektory svírají. Značíme $|\angle \mathbf{u}, \mathbf{v}|$.

Věta 136. *Nechť jsou dány vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Pak*

$$|\angle \mathbf{u}, \mathbf{v}| = \arccos \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}.$$

Poznámka 61. Platí obdobně i pro přímky dané obecnou rovnicí (vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou jejich normálové vektory.)

Věta 137. *Nechť jsou dány přímky $p(A, \mathbf{u}), q(B, \mathbf{v})$. Pak*

$$|\angle p, q| = \arccos \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}.$$

Příklad 91. *Určete odchylku přímek $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{BC'}$ krychle $ABCD A' B' C' D'$.*

Řešení. Vyjádříme jako vektory a dosadíme do vzorce.

Věta 138. *Nechť jsou dány přímky $p(A, \mathbf{u}), q : ax + by + c = 0, \mathbf{n}(a, b)$. Pak*

$$|\angle p, q| = \arcsin \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{n}|}.$$

Věta 139. *Nechť $p(A, \mathbf{u})$ je přímka, $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ rovina, $\mathbf{n}(a, b, c)$. Pak*

$$|\angle p, \alpha| = \arcsin \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{n}|}.$$

Věta 140. *Nechť $\alpha : ax + by + cz + d = 0, \beta : ex + fy + gz + h = 0$ jsou dvě roviny a $\mathbf{m}(a, b, c), \mathbf{n}(e, f, g)$. Pak*

$$|\angle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|}.$$

Příklad 92. *Určete rovnici přímky, která má od přímky $p : x - 2y + 3 = 0$ odchylku 30° a prochází jejím průsečíkem s osou y .*

Řešení. Dosadíme do vzorce a jednu proměnnou zvolíme.

Příklad 93. Najděte parametrické vyjádření přímky, která prochází počátkem a protíná přímku $p = \{[4 + t, 3 + 4t, 1 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$ a jejich odchylka je 30° .

Řešení. Dosadíme do vzorce a jednu proměnnou zvolíme.

Kapitola 23

Komplexní čísla

Definice 238. Množinu označenou $\mathbb{C} = \{(a, b); a, b, \in \mathbb{R}\}$ spolu s operacemi $+$ a $\cdot$ definovanými následovně:

i. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$

ii. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc),$

nazýváme **komplexními čísly**.

Věta 141. Pro všechna $x = (a, b), y = (c, d) \in \mathbb{C}$ platí

i. $x - y = (a - c, b - d),$

ii. $y \neq (0, 0) : \frac{x}{y} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right).$

Věta 142. Množina $\mathbb{C}$ spolu s operacemi $+, \cdot$ tvoří komutativní těleso.

Poznámka 62. Množina M spolu s operacemi $+, \cdot$ tvoří (komutativní) těleso, pokud

i. $(M, +)$ je komutativní grupa,

ii. $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ je komutativní grupa,

iii. platí distributivní zákony.

Tělesem je třeba $\mathbb{R}, \mathbb{Q}; \mathbb{Z}$ však tělesem není (neexistují inverzní prvky vzhledem k násobení. Pět krát co je jedna?).

Věta 143. Množiny $\mathbb{R}$ a $(x, 0) \in \mathbb{C}$ jsou izomorfní.

Důkaz. Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

i. $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y),$

ii. $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(xy),$

kde φ je zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$: $\varphi(a) = (a, 0)$. □

Poznámka 63. Dále budeme zapisovat komplexní číslo (a, b) jako $a + bi$.

Definice 239. Tvar komplexního čísla $a + bi$ nazýváme **algebraický**. Číslo a je jeho **reálná část**, b **imaginární část**.

Číslo $(0, 1)$ označme i a nazývejme **imaginární jednotka**.

Čísla $a + bi$, kde $b \neq 0$ nazývejme **imaginární**. Pokud taky $a = 0$, nazýváme je **ryze imaginární**.

Poznámka 64. Komplexní číslo $x = (a, b)$ lze chápat jako bod v rovině se souřadnicemi $[a, b]$.

Definice 240. Nechť je dáno komplexní číslo $x = a + bi$. Číslo $\bar{x} = a - bi$ nazýváme **komplexně sdruženým** k číslu x . Číslo $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$ je **absolutní hodnota** čísla x . Jestliže $|x| = 1$, číslu x říkáme **komplexní jednotka**.

Definice 241. **Argumentem** komplexního čísla nazýváme orientovaný úhel φ , který svírá kladná poloosa reálné osy s polohovým vektorem daného bodu představujícím dané komplexní číslo.

Věta 144. Každé komplexní číslo $x = a + bi$, $x \neq 0$, lze zapsat ve tvaru

$$x = |x|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

kde φ je argumentem čísla x . Dále platí:

$$\cos \varphi = \frac{a}{|x|}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{|x|}.$$

Definice 242. Tvar komplexního čísla $x = |x|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ nazýváme **goniometrický**.

Poznámka 65. Každé komplexní číslo lze zapsat uspořádanou dvojicí $x = (|x|, \varphi)$. Tato čísla jsou **polárními souřadnicemi** komplexního čísla x .

Věta 145 (Moivreova věta). Nechť je dáno komplexní číslo $x = |x|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ a $n \in \mathbb{N}$ je nenulové číslo. Pak platí

$$x^n = |x|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Poznámka 66. Gaussova rovina je množina bodů $[a, b]$; $a, b \in \mathbb{R}$. Každému prvku této množiny odpovídá komplexní číslo (a, b) . Osa x odpovídá reálné části tohoto komplexního čísla, osa y imaginární části.

Příklad 94. Jsou dána komplexní čísla $a = 2 + i$, $b = 1 - 2i$. Zobraďte v Gaussově rovině jejich součin a podíl.

Řešení. Součin získáme vynásobením velikostí (stejnolehlostí) a sečtením úhlů. Podíl obdobně.

Definice 243. (Algebraická) rovnice v komplexní neznámé n -tého stupně s jednou neznámou $x \in \mathbb{C}$ je každá rovnice tvaru $P(x) = 0$, kde $P(x)$ je polynom n -tého stupně s reálnými (resp. komplexními) koeficienty.

Věta 146 (Základní věta algebry). Každý polynom n -tého stupně s komplexními koeficienty má v množině $\mathbb{C}$ právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost.

Věta 147. Má-li algebraická rovnice s reálnými koeficienty imaginární kořen $x = a + bi$, má taky kořen $\bar{x} = a - bi$.

Definice 244. Binomickou rovnici s neznámou $x \in \mathbb{C}$ nazýváme každou rovnici tvaru $x^n = a$, kde $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Každý komplexní kořen binomické rovnice nazýváme komplexní n -tou odmocninou z čísla a .

Příklad 95. Vypočtěte $z = \sqrt{1 + \sqrt{3}i}$.

Řešení. Umocněním získáme $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$. Platí $|z^2| = 2$, takže $z^2 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = |z|^2(\cos 2x + i \sin 2x)$. Dále řešíme jako goniometrickou rovnici.

Příklad 96. Řešte v $\mathbb{C}$: $z^3 = i$.

Řešení. Vyjádříme v goniometrickém tvaru a dále řešíme pomocí Moivreovy věty.

Definice 245. Kvadratickou rovnici s (komplexní) neznámou $x \in \mathbb{C}$ a reálnými (resp. komplexními) koeficienty a, b, c nazýváme každou rovnici tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ (resp. $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$).

Příklad 97. V $\mathbb{C}$ řešte $z^2 + 3z + 10i = 0$.

Řešení. 1. způsob: Doplněním na čtverec dostáváme $(z + \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} - 10i$. Substituujeeme a dále řešíme jako binomickou rovnici.

2. způsob: Pomocí diskriminantu.

3. způsob: Vyjádřením neznámé v algebraickém tvaru ($z = a + bi$) a roznásobením.

Definice 246. Trinomická rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$ a reálnými koeficienty $a, b, c \in \mathbb{R}$ nazýváme rovnici tvaru $ax^p + bx^q + c = 0$, kde $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$, $a, b \neq 0$.

Příklad 98. Užitím Moivreovy věty odvoďte vzorce pro $\sin 3x$, $\cos 3x$.

Řešení. Platí $(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x$. Z binomické věty máme $(\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x$. Metodou porovnání koeficientů u i vzorce dostáváme.

Kapitola 24

Posloupnosti

Definice 247. Necht A je množina. Zobrazení $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ (nebo $a : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow A$) se nazývá **posloupnost** prvků množiny A , $k \in \mathbb{N}$.

Definice 248. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Pak je

- i. **rostoucí** právě tehdy, když $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$,
- ii. **klesající** právě tehdy, když $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$,
- iii. **nerostoucí** právě tehdy, když $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$,
- iv. **neklesající** právě tehdy, když $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$.

Posloupnost, která má jednu z těchto vlastností, se nazývá **monotónní**. Posloupnost rostoucí nebo klesající nazýváme **ryze monotónní**.

Příklad 99. Určete monotónnost posloupnosti $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Řešení. Spočítáme $a_{n+1} - a_n$.

Definice 249. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Pak je

- i. **prostá** právě tehdy, když $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \neq n \implies a_m \neq a_n$,
- ii. **stacionární** (konstantní) právě tehdy, když $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = a_{n+1}$.

Definice 250. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Pak je

- i. **zdola omezená**, pokud existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq k$,
- ii. **shora omezená**, pokud existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq k$.

Posloupnost je **omezená**, pokud je omezená shora i zdola. Pokud není omezená ani shora, ani zdola, je **neomezená**.

Definice 251. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $\{k_1, k_2, \dots, k_n, \dots\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}, \dots\}$ je **posloupnost vybraná z posloupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice 252. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **aritmetická** právě tehdy, když

$$\exists d \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_n = a_{n-1} + d$$

a číslo d se nazývá **diference**.

Věta 148. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost s diferencí d . Pak platí:

- i. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = a_1 + (n-1)d$,
- ii. $\forall r, s \in \mathbb{N} : a_s = a_r + (s-r)d$.

Důkaz.

i. Matematickou indukcí:

- 1. $n = 1 : a_1 = a_1 + (1-1)d$ platí
- 2. $a_n = a_1 + (n-1)d \implies a_{n+1} = a_1 + nd$, takže $a_{n+1} = a_n + d = a_1 + (n-1)d + d = a_1 + nd$

ii. Užitím již dokázaného vztahu:

$$\begin{aligned} a_s &= a_1 + (s-1)d, \\ a_r &= a_1 + (r-1)d. \end{aligned}$$

Sečtením dostáváme

$$a_s - a_r = (s-1)d - (r-1)d,$$

takže

$$a_s = a_r + (s-r)d,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Věta 149. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost s diferencí d . Necht

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

je součet prvních n členů nekonečné aritmetické posloupnosti nebo součet n -členné aritmetické posloupnosti. Pak platí:

$$\forall n \in \mathbb{N} : S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n).$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
 S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\
 &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-1)d] \\
 &= [a_1 + (n-1)d] + [a_1 + (n-2)d] + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \\
 2S_n &= 2a_1 + (n-1)d + 2a_1 + (n-1)d + \cdots + 2a_1 + (n-1)d + 2a_1 + (n-1)d \\
 2S_n &= n[a_1 + a_1 + (n-1)d], \text{ takže} \\
 S_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2},
 \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. □

Příklad 100. *Napište prvních pět členů aritmetické posloupnosti, kde platí*

$$\begin{aligned}
 a_1 + a_4 &= 12, \\
 a_2 - a_6 &= -8.
 \end{aligned}$$

Řešení. Vyjádříme pomocí a_1 a difference a vyřešíme.

Definice 253. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **geometrická** právě tehdy, když

$$\exists q \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_n = a_{n-1} \cdot q$$

a číslo q se nazývá **kvocient**.

Příklad 101. *Určete, zda posloupnost $\left\{\frac{2n-1}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická, nebo geometrická.*

Řešení. Spočítáme a_{n+1}/a_n a $a_{n+1} - a_n$. Je geometrická, je-li a_{n+1}/a_n konstantní a naopak (a_{n+1}/a_n nesmí záviset na n).

Věta 150. *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost s kvocientem q . Pak platí:*

- i. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$,*
- ii. $\forall r, s \in \mathbb{N} : a_s = a_r \cdot q^{s-r}$.*

Důkaz.

i. Matematickou indukcí:

1. $n = 1 : a_1 = a_1 \cdot q^0$ platí
2. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \implies a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$, takže $a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^n$

ii. Užitím již dokázaného vztahu:

$$\begin{aligned} a_s &= a_1 \cdot q^{s-1}, \\ a_r &= a_1 \cdot q^{r-1}. \end{aligned}$$

Vydělením dostáváme

$$\frac{a_s}{a_r} = \frac{a_1 \cdot q^{s-1}}{a_1 \cdot q^{r-1}} = q^{s-r},$$

takže

$$a_s = a_r \cdot q^{s-r},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Věta 151. *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost s kvocientem q . Nechť*

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

je součet prvních n členů nekonečné geometrické posloupnosti nebo součet n -členné geometrické posloupnosti. Pak platí $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$i. \quad q = 1 : S_n = na_1,$$

$$ii. \quad q \neq 1 : S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} \\ qS_n &= a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \\ qS_n - S_n &= -a_1 + a_1q^n \\ S_n(q - 1) &= a_1(q^n - 1), \text{ jestli } q \neq 1, \text{ pak} \\ S_n &= \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. □

Příklad 102. *Nalezněte geometrickou posloupnost, pro níž platí*

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 &= 5, \\ a_2 + a_4 &= 10. \end{aligned}$$

Řešení. Vyjádříme pomocí a_1 a kvocientu a vyřešíme.

Poznámka 67. Rozlišujeme dva typy zadání posloupnosti, a to:

i. **rekurentní**: pomocí jednoho nebo několika předchozích členů

$$a_n = a_{n-1} + d, \quad a_{n-1} \cdot q;$$

ii. **explicitní**: n -tý člen je vyjádřen pomocí n

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Příklad 103. Nalezněte explicitní vyjádření posloupnosti zadané rekurentně: $a_{n+1} = 3a_n + 1, a_1 = 2$.

Řešení. Napíšeme si pár prvních členů posloupnosti a nějak si z toho vycucáme vzorec. Ten pak dokážeme matematickou indukcí.

Definice 254. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost, $A \in \mathbb{R}$ číslo. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má **limitu** rovnu číslu A , jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon).$$

Příklad 104. Vypočtěte limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}$.

Řešení. Rozšíříme $\frac{1}{n}$. Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ je totiž rovna nule.

Definice 255. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má **nevlastní limitu** $+\infty$ (resp. $-\infty$), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > K \text{ (resp. } a_n < K \text{)}.$$

Příklad 105. Určete $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-n^2}{2+n}$.

Řešení. Rozložíme na součin.

Definice 256. Má-li posloupnost vlastní limitu, je **konvergentní**. V opačném případě je **divergentní**.

Věta 152. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Věta 153. Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Věta 154. Každá nekonečná posloupnost vybraná z konvergentní posloupnosti je konvergentní a má stejnou limitu.

Věta 155 (Věta o třech limitách). Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou tři posloupnosti

takové, že

$$\exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m : a_n \leq b_n \leq c_n \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A.$$

Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$.

Věta 156. Necht jsou dány dvě posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Necht $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ a $c \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo. Pak platí:

- i. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$,
- ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = cA$,
- iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = A \cdot B$,
- iv. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{A}{B}$.

Věta 157. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$.

Definice 257. Necht M je podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $a \in \mathbb{R}$ (pokud existuje) nazveme **horní** (resp. **dolní**) **závorou** množiny M právě tehdy, když

$$\forall x \in M : x \leq a \text{ (resp. } x \geq a \text{)}.$$

Definice 258. Necht M je podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $c \in \mathbb{R}$ (pokud existuje) nazveme **supremem** (resp. **infimem**) množiny M , jestliže je její nejmenší horní závorou (resp. největší dolní závorou), tzn. že platí:

- i. $\forall x \in M : x \leq c$ (resp. $x \geq c$),
- ii. $\forall t \in \mathbb{R} : \forall x \in M : x \leq t \implies t \geq c$ (resp. $x \geq t \implies t \leq c$).

Značíme $c = \sup M$ (resp. $c = \inf M$).

Definice 259. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Číslo

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i, n \in \mathbb{N}$$

nazýváme **n -tým částečným součtem** posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupnost částečných součtů** posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Nekonečnou řadou nazveme posloupnost částečných součtů $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ a značíme stručně

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Čísla $a_n, n = 1, 2, \dots$ nazýváme **členy řady**, čísla $S_n, n = 1, 2, \dots$ nazýváme **částečné součty řady**.

Definice 260. Má-li posloupnost částečných součtů $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu S , řekneme, že nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje** a číslo S nazveme jejím součtem. V opačném případě **diverguje**.

Věta 158. Necht je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Věta 159. Dvě řady lišící se v konečném počtu členů se chovají stejně.

Poznámka 68. Dále budeme studovat řady s nezápornými členy (tzn. k jejich konvergenci stačí, aby byly shora omezené).

Věta 160 (Srovnávací kritérium konvergence). Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy s vlastností

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n.$$

Pak platí:

- i. konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje taky $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- ii. diverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, diverguje taky $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Poznámka 69. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konverguje.

Věta 161. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ konverguje právě tehdy, když $a > 1, a \in \mathbb{R}^+$.

Věta 162 (Limitní srovnávací kritérium). Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s kladnými čísly. Necht $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$. Pak platí:

- i. $c \neq 0 \wedge c \neq \infty \implies$ řady se chovají stejně,
- ii. $c = 0 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
- iii. $c = \infty \wedge \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad 106. Rozhodněte o chování řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+1}$.

Řešení. Srovnáme s $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje. Počítáme tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2+n+1}{n^3+1}}{\frac{1}{n}}.$$

Je-li rozdílná od nuly a od nekonečna, chovají se řady stejně.

Definice 261. Nekonečnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost s kvocientem q , nazveme **nekonečnou geometrickou řadou** a číslo q nazveme jejím **kvocientem**.

Věta 163. *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je geometrická řada s kvocientem q , kde $|q| < 1$. Pak je tato řada konvergentní a má součet*

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Důkaz. Počítejme

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1}{q - 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (q^n - 1)$$

jestliže $|q| < 1$, pak

$$= \frac{a_1}{q - 1} \cdot (0 - 1) = -\frac{a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

□

Příklad 107. *Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$.*

Řešení. Je $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$. Platí $|q| < 1$, takže můžeme použít větu 163.

Příklad 108. *Je dán čtverec o straně a , spojnice středů jeho stran tvoří stranu dalšího čtverce, ... Určete součet obsahů a obvodů takto vzniklých čtverců.*

Kapitola 25

Limita funkce

Definice 262 (Vlastní limita ve vlastním bodě). Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ **limitu** $A \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$ platí $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Poznámka 70. Definici 262 lze taky zapsat symbolicky. Řekneme, že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} : f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon).$$

Definice 263 (Nevlastní limita ve vlastním bodě). Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ **nevlastní limitu** $+\infty$ (resp. $-\infty$), jestliže ke každému $M \in \mathbb{R}$ existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$ platí $f(x) > M$ (resp. $f(x) < M$). Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ (resp. } -\infty \text{)}.$$

Poznámka 71. Definici 263 lze taky zapsat symbolicky. Řekneme, že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (resp. $-\infty$) právě tehdy, když

$$\forall M \in \mathbb{R} : \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} : f(x) > M \text{ (resp. } f(x) < M \text{)}.$$

Definice 264 (Vlastní limita v nevlastním bodě). Funkce f má v bodě ∞ (resp. $-\infty$) **limitu** $A \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall x \in \mathbb{R}, x > K$ (resp. $x < K$) platí $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

Poznámka 72. Definici 264 lze taky zapsat symbolicky. Řekneme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$) právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists K \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, x > K \text{ (resp. } x < K) : f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon).$$

Poznámka 73. Definice nevlastní limity v nevlastním bodě jsou celkem čtyři (dvakrát dvě možnosti pro plus / minus nekonečno). Pro ušetření místa budou oba případy zaznačeny jako $\pm\infty$.

Definice 265 (Nevlastní limita v nevlastním bodě). Funkce f má v bodě $\pm\infty$ **limitu** $\pm\infty$, jestliže ke každému $M \in \mathbb{R}$ existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall x \in \mathbb{R}, x > K$ (resp. $x < K$) platí $f(x) > M$ (resp. $f(x) < M$). Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Poznámka 74. Definici 265 lze taky zapsat symbolicky. Řekneme, že $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ právě tehdy, když

$$\forall M \in \mathbb{R} : \exists K \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, x > K \text{ (resp. } x < K) : f(x) > M \text{ (resp. } f(x) < M).$$

Definice 266. Okolím bodu

- i. $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme množinu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta \in \mathbb{R}^+$,
 - ii. ∞ rozumíme množinu $(k, \infty), k \in \mathbb{R}$,
 - iii. $-\infty$ rozumíme množinu $(-\infty, k), k \in \mathbb{R}$
- a značíme $\mathcal{O}(x_0)$ (resp. $\mathcal{O}(\infty)$). **Prstencovým okolím bodu x** je množina $\mathcal{O}(x) \setminus \{x\}$, kterou značíme $\mathcal{P}(x)$. Množinu $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ nazvěme **rozšířenou množinou reálných čísel** a označme $\mathbb{R}^*$.

Definice 267 (Souhrnná definice limity). Řekneme, že f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(A)$ bodu A existuje prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in \mathcal{P}(x_0)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(A)$. Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Věta 164. Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.

Definice 268. Funkce f je **spojitá v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definice 269. Funkce f je **spojitá na intervalu** $J \subseteq \mathbb{R}$, jestliže

- i. f je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu J ,
- ii. patří-li počáteční (resp. koncový) bod J k tomuto intervalu, je v něm funkce f spojitá zprava (resp. zleva).

Poznámka 75 (Neurčitě výrazy). Neurčitě výrazy jsou

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty.$$

Věta 165. *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a necht existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Pak platí:*

- i. $\lim_{x \rightarrow x_0} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$
- ii. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$
- iii. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)},$
- iv. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)|.$

Věta 166 (Věta o limitě funkcí shodujících se v prstencovém okolí bodu). *Nechť jsou dány funkce f, g a necht existuje prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0)$ takové, že $\forall x \in \mathcal{P}(x_0) : f(x) = g(x)$. Necht $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, A \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a platí $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.*

Příklad 109. Spočtěte $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$.

Řešení. Platí

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2.$$

Příklad 110. Spočtěte $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 - 9})$.

Řešení. Rozšíříme $\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 9}$.

Věta 167 (Věta o sevření). *Nechť f, g, h jsou funkce a necht existuje prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takové, že $\forall x \in \mathcal{P}(x_0) : g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Necht $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A, A \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a platí $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.*

Věta 168 (Věta o součinu nulové a ohraničené funkce). *Nechť jsou dány dvě funkce f, g a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. Necht existuje prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0)$, bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takové, že funkce g je na tomto okolí ohraničená. Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.*

Příklad 111. Spočtěte $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3 - x^2 + x + 2)$.

Řešení. Vytkneme x^3 .

Věta 169 (Věta o limitě složené funkce). *Nechť f, g jsou funkce a $x_0 \in \mathbb{R}^*, A \in \mathbb{R}$ a necht platí*

i. $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A,$

ii. funkce f je spojitá v bodě x_0 .

Pak platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(A).$$

Poznámka 76. Důsledkem věty 169 je fakt, že

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \implies \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x)} = e^A.$$

To využíváme při výpočtu limit exponenciálních výrazů. Platí totiž

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Příklad 112. Spočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}\right)$.

Řešení. Je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}\right) = \cos 0 = 1,$$

neboť $\sin \frac{1}{x}$ je omezená a x^2 je spojitá v $\mathbb{R}$.

Příklad 113. Spočtěte $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x}$.

Řešení. Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x \ln x}.$$

Protože je e^x spojitá, je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \ln x}.$$

Věta 170 (Věta o limitě typu 1/0). Nechť f je funkce a nechť existuje pravé prstencové okolí $\mathcal{P}^+(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{P}^+(x_0)$ platí $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$). Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 0$. Pak platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)} = \infty \text{ (resp. } -\infty).$$

Analogicky pro levé okolí bodu.

Příklad 114. Spočtěte $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2}$.

Řešení. Dosadíme:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

Věta 171 (l'Hôpitalovo pravidlo). Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť je splněna jedna z podmínek

i. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$

ii. $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty.$

Existuje-li $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak existuje také $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Příklad 115. Spočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$

Řešení. Řešíme l'Hôpitalovým pravidlem. Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Příklad 116. Spočtěte $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$

Řešení. Převédeme na společný jmenovatel a použijeme l'Hôpitalovo pravidlo.

Příklad 117. Spočtěte $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right).$

Řešení. Rozšíříme $\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}.$

Příklad 118. Spočtěte $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}.$

Řešení. Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x}.$$

Příklad 119. Spočtěte $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x.$

Řešení. Převédeme do jmenovatele:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Kapitola 26

Derivace funkce

Definice 270. Necht $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Jestliže existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme **derivací funkce f v bodě a** a značíme ji $f'(a)$. Obdobně definujeme **derivaci zprava** a **derivaci zleva funkce f v bodě a** předpisy

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad a \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Derivaci zleva a derivaci zprava souhrnně nazýváme **jednostrannými derivacemi**.

Poznámka 77. Derivaci lze obdobně zavést jako limitu

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Poznámka 78. Při počítání derivace funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ mohou nastat tyto případy:

$$\text{derivace v bodě } a \begin{cases} \text{neexistuje,} \\ \text{existuje a je } \begin{cases} \textbf{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \textbf{nevlastní, tj. je rovna } +\infty \text{ nebo } -\infty. \end{cases} \end{cases}$$

Poznámka 79. Hodnota derivace v daném bodě je směrnice tečny funkce v tomto bodě.

Věta 172. Jestliže existuje derivace funkce f v bodě a (vlastní či nevlastní), pak je určena jednoznačně.

Definice 271. Necht existuje vlastní derivace funkce $f(x)$ pro všechna $x \in M, M \subset D(f)$. Pak funkci $f'(x)$, která každému bodu $x \in M$ přiřadí derivaci funkce f v tomto bodě,

nazýváme **derivací funkce f na množině M** .

Věta 173 (Bolzanova). Má-li funkce f v bodě a vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.

Poznámka 80. Má-li funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ na množině $M \subset \mathbb{R}$ vlastní derivaci v každém bodě $x \in M$, pak zobrazení $f' : M \rightarrow \mathbb{R}$, které přiřadí bodu $x \in M$ hodnotu $f'(x)$, je reálnou funkcí definovanou na množině M .

Poznámka 81 (Derivace základních funkcí). Platí:

- i. $(c)' = 0, c \in \mathbb{R}$,
- ii. $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}, r \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+$,
- iii. $(\sin x)' = \cos x, x \in \mathbb{R}$,
- iv. $(\cos x)' = -\sin x, x \in \mathbb{R}$,
- v. $(e^x)' = e^x, x \in \mathbb{R}$,
- vi. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- vii. $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- viii. $(\ln x)' = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^+$,
- ix. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$,
- x. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$,
- xi. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$,
- xii. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$,
- xiii. $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$,
- xiv. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}^+$.

Příklad 120. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = x$.

Řešení. Je $f'(x) = 1$.

Věta 174 (Věta o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí). Necht existují derivace funkcí f a g v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $f \pm g, fg, f/g$ a cf , kde $c \in \mathbb{R}$, mají v bodě a derivaci a platí:

- i. $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$,
- ii. $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
- iii. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$ pro $g(a) \neq 0$,
- iv. $(cf)'(a) = cf'(a)$.

Příklad 121. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = xe^x$.

Řešení. Je $f'(x) = 1e^x + xe^x = e^x(x+1)$.

Věta 175 (Derivace inverzní funkce). Nechť funkce $f : x = f(y)$ je spojitá a ryze monotónní na intervalu I . Nechť y_0 je vnitřní bod intervalu I a nechť má f v y_0 derivaci $f'(y_0)$. Pak inverzní funkce $f^{-1} : y = f^{-1}(x)$ má v bodě $x_0 = f(y_0)$ derivaci a platí

$$(f^{-1})'(x_0) = \begin{cases} \frac{1}{f'(y_0)}, & \text{je-li } f'(y_0) \neq 0, \\ +\infty & \text{je-li } f'(y_0) = 0 \text{ a funkce } f \text{ je na } I \text{ rostoucí,} \\ -\infty & \text{je-li } f'(y_0) = 0 \text{ a funkce } f \text{ je na } I \text{ klesající.} \end{cases}$$

Věta 176 (Derivace složené funkce). Nechť f, g jsou funkce. Nechť existuje derivace funkce g v bodě a a derivace funkce f v bodě $b = g(a)$. Pak i složená funkce $F = f \circ g$ má derivaci v bodě a a platí

$$F'(a) = (f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Příklad 122. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = (x^3 + 2x^2 + x - 1)^8$.

Řešení. Zavedeme substituci $x^3 + 2x^2 + x - 1 = u$. Pak $f'(x) = 8u^7 u'$. Dále $u' = 3x^2 - 4x + 1$. Je tedy $f'(x) = 8(x^3 + 2x^2 + x - 1)^7 (3x^2 - 4x + 1)$.

Poznámka 82. Funkce tvaru $f(x)^{g(x)}$ derivujeme jako složenou funkci $e^{g(x) \ln f(x)}$, protože $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ a funkce $e^r, r \in \mathbb{R}$ je prostá a spojitá.

Příklad 123. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = x^x$.

Řešení. Platí $f(x) = e^{x \ln x}$, takže $f'(x) = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = x^x (\ln x + x \cdot \frac{1}{x})$.

Definice 272. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom **n -tou derivací** funkce f rozumíme funkci, kterou označujeme $f^{(n)}$ a definujeme

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})',$$

přičemž $f^{(0)} = f$.

Definice 273. Přímka t o rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

se nazývá **tečna ke grafu funkce f** v dotykovém bodě $T = (x_0, f(x_0))$. Přímka n , která prochází bodem T a je kolmá k přímce t , se nazývá **normála ke grafu funkce f** v bodě T .

Věta 177. Má-li tečna grafu funkce t v dotykovém bodě $T = (x_0, f(x_0))$ rovnici

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \text{ kde } y_0 = f(x_0),$$

pak normála n má rovnici

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \text{ pokud } f'(x_0) \neq 0.$$

Poznámka 83. Funkci lze vyjádřit buď jako $y = f(x)$ (explicitně – tedy vždy máme přímo vyjádřeno y), nebo ve tvaru $f(x, y) = 0$ (implicitně – z této rovnice obecně nelze vyjádřit y). Například $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ je implicitní vyjádření kružnice, zatímco $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ je explicitní vyjádření.

Věta 178 (Derivace funkce dané implicitně). Nechť máme funkci danou implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$. Pak

$$F'(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \cdot y'.$$

Poznámka 84. Věta 178 je složitá. Lze ji shrnout asi takhle:

Funkci zderivujeme podle x (y považujeme za konstantu) tak, jak jsme zvyklí. Pak funkci zderivujeme ještě podle y a předtím, než to přičteme k tomu, co jsme předtím derivovali podle x , to vynásobíme y' .

To funguje, protože se vlastně díváme na y jako na funkci x ($y = f(x)$), takže derivace $y = f'(x) \cdot (f(x))'$ (např. $(y^2)' = 2yy'$).

Příklad 124. Spočítejte derivaci funkce rovnice kružnice $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení. Derivujeme funkci danou implicitně: $f(x, y)' : 2x + 2yy' = 0$.

Věta 179 (Cauchy-Bolzanova věta). Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Pak existuje alespoň jedno číslo $x_0 \in (a, b)$ takové, že $f(x_0) = 0$.

Příklad 125. Určete znaménka funkce $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$.

Věta 180 (Rolleho věta). Nechť funkce f má následující vlastnosti:

- i. je spojitá na uzavřeném ohraničeném intervalu $\langle a, b \rangle$,
- ii. má derivaci na otevřeném intervalu (a, b) ,
- iii. platí $f(a) = f(b)$.

Pak existuje alespoň jedno číslo $x_0 \in (a, b)$ takové, že $f'(x_0) = 0$.

Věta 181 (Lagrangeova věta). Nechť funkce f má následující vlastnosti:

- i. je spojitá na uzavřeném ohraničeném intervalu $\langle a, b \rangle$,
- ii. má derivaci na otevřeném intervalu (a, b) .

Pak existuje alespoň jedno číslo $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 182 (Cauchyho věta). Necht funkce f a g mají následující vlastnosti:

- i. jsou spojité na uzavřeném ohraničeném intervalu $\langle a, b \rangle$,
- ii. mají derivaci na otevřeném intervalu (a, b) , přičemž $g'(x) \neq 0$ na $\langle a, b \rangle$.

Pak existuje alespoň jedno číslo $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Kapitola 27

Průběh funkce

Poznámka 85. Musíme umět nakreslit graf a popsat základní vlastnosti lineární a kvadratické funkce, nepřímé úměrnosti, lineární lomené, mocninné, exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické funkce.

Věta 183. *Nechť funkce f má na intervalu (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}^*$ derivaci. Je-li pro všechna x z intervalu (a, b) :*

- i. $f'(x) > 0$, pak je f rostoucí,*
- ii. $f'(x) \geq 0$, pak je f neklesající,*
- iii. $f'(x) < 0$, pak je f klesající,*
- iv. $f'(x) \leq 0$, pak je f nerostoucí,*
- v. $f'(x) = 0$, pak je f konstantní*

na intervalu (a, b) .

Příklad 126. *Určete monotónnost a lokální extrémy funkce $f(x) = \frac{x^4}{4-x^2}$.*

Řešení. Určíme, kdy je derivace kladná (tam funkce roste), resp. záporná (tam funkce klesá), resp. nulová (tam je stacionární bod).

Definice 274. Funkce f má v bodě x_0 **lokální minimum** (resp. **maximum**), jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $\forall x \in \mathcal{O}(x_0)$:

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \text{resp. } f(x) \leq f(x_0).$$

Lokální minimum (resp. maximum) je **ostré**, jestliže

$$f(x) > f(x_0), \quad \text{resp. } f(x) < f(x_0).$$

Definice 275. Bod $x_0 \in D(f)$ takový, že $f'(x_0) = 0$ je **stacionární bod**.

Věta 184. Nechť f má v bodě x_0 lokální extrém. Pak buď $f'(x_0) = 0$, nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

Definice 276. Funkce f je **konvexní** (resp. **konkávní**) v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0)$ platí

$$f(x) \geq g(x), \quad \text{resp. } f(x) \leq g(x),$$

kde $g(x)$ jsou funkční hodnoty na tečně v bodě $(x_0, f(x_0))$.

Funkce je konvexní (resp. konkávní) na intervalu, jestliže je konvexní (resp. konkávní) v každém jeho bodě.

Definice 277. Funkce f má v bodě x_0 **inflexi**, jestliže existuje $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ a f je v nějakém levém okolí bodu x_0 konvexní a v nějakém pravém okolí tohoto bodu konkávní, resp. naopak. Má-li funkce f v bodě x_0 inflexi, pak bod $(x_0, f(x_0))$ nazýváme **inflexním bodem** funkce f .

Věta 185. Nechť má funkce f v intervalu (a, b) druhou derivaci. Je-li

- i. $f''(x) > 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, pak je f konvexní na (a, b) .
- ii. $f''(x) < 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, pak je f konkávní na (a, b) .
- iii. $f''(x) = 0$ v nějakém bodě $x_0 \in (a, b)$ a dále je f'' kladná v nějakém levém okolí bodu x_0 a záporná v nějakém pravém okolí bodu x_0 , resp. naopak, pak má f v x_0 inflexi.

Definice 278. Přímka $x = x_0, x_0 \in \mathbb{R}$ se nazývá **asymptota bez směrnice** grafu funkce f , jestliže alespoň jedna jednostranná limita funkce f v bodě x_0 je nevlastní, tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Definice 279. Přímka $y = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$ se nazývá **asymptota se směrnicí** grafu funkce f v $+\infty$ (resp. $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0, \quad \text{resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Věta 186. Přímka $y = ax + b$ je asymptota se směrnicí v $\pm\infty$ právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a, a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b, b \in \mathbb{R}.$$

Příklad 127. Najděte asymptoty grafu funkce $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$.

Řešení. Asymptoty bez směrnice: řešíme levé a pravé limity v bodech nespojitosti. Asymptoty se směrnicí: hledáme přímku $y = ax + b$, kde $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$.

Poznámka 86. Při určování průběhu funkce musíme:

- i.* vyšetřit $D(f)$, body nespojitosti, nulové body, znaménka funkce, popř. sudost / lichost, periodičnost,
- ii.* určit intervaly monotonie, lokální extrémů,
- iii.* určit intervaly konvexnosti / konkávnosti, inflexní body,
- iv.* určit asymptoty bez směrnice a se směrnicí a
- v.* načrtnout graf funkce.

Příklad 128. Vyšetřete průběh funkce $y = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$.

Kapitola 28

Neurčitý integrál

Definice 280. Nechť $f(x)$ je definována na intervalu I . Funkce $F(x)$ se nazývá **primitivní** k funkci $f(x)$ na I , jestliže platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$. Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na I se nazývá **neurčitý integrál** z funkce $f(x)$ a značí se $\int f(x) dx$. Tedy

$$\int f(x) dx = \{F(x) : F(x) \text{ je primitivní k } f(x) \text{ na } I\}.$$

Věta 187. Je-li $F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$ na intervalu I , je taky $F(x) + c$ primitivní funkce k $f(x)$ na I . Má-li funkce $f(x)$ aspoň jednu primitivní funkci, má jich nekonečně mnoho.

Věta 188. Je-li funkce f spojitá na intervalu I , pak na tomto intervalu existuje primitivní funkce k funkci f .

Věta 189 (Pravidla pro integrování). Nechť na intervalu I existují integrály $\int f(x) dx$ a $\int g(x) dx$. Pak na I existují také integrály $\int (f(x) \pm g(x)) dx$ a $\int \alpha f(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, přičemž platí:

$$\begin{aligned}\int (f(x) \pm g(x)) dx &= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx, \\ \int \alpha f(x) dx &= \alpha \int f(x) dx.\end{aligned}$$

Poznámka 87 (Tabulkové integrály).

$$\int 0 \, dx = c$$

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{x+a} \, dx = \ln |x+a| + c$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

$$\int a^{bx} \, dx = \frac{1}{b} \cdot \frac{a^{bx}}{\ln a} + c, a > 0$$

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 ax} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 ax} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{cotg} ax + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-a^2x^2}} \, dx = \frac{1}{a} \arcsin ax + c$$

$$\int \frac{1}{a^2x^2+1} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} ax + c$$

Příklad 129. Řešte integrál $\int x \, dx$.

Řešení. Je $\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c$.

Věta 190 (Integrační metoda *per partes*). Necht funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu I . Pak platí

$$\int u(x)v'(x) \, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) \, dx,$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

Příklad 130. Řešte $\int x \sin x \, dx$.

Řešení. Řešme *per partes*:

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right| = x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + c \end{aligned}$$

Příklad 131. Řešte $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

Řešení. Řešme *per partes*:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 1) e^{-x} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 + 1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array} \right| \\ &= (x^2 + 1)(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) dx = \dots \end{aligned}$$

Poznámka 88 (Substituční metoda). Označme si substituci $\varphi(x) = u$. Tuto rovnost diferencujeme.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = u \\ \varphi'(x) dx = du \end{array} \right| = \int f(u) du.$$

Příklad 132. Řešte $\int \frac{(1+\ln x)^4}{x} dx$.

Řešení. Metodou substituční:

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 + \ln x)^4}{x} dx &= \left| \begin{array}{l} 1 + \ln x = u \\ \frac{1}{x} dx = du \end{array} \right| = \int u^4 du \\ &= \frac{u^5}{5} + c = \frac{(1 + \ln x)^5}{5} + c \end{aligned}$$

Příklad 133. Řešte $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

Řešení. Substitucí $\sqrt{x} = t$.

Příklad 134. Řešte $\int \sqrt{1-x^2} dx$.

Řešení. Substitucí $x = \sin t$.

Poznámka 89 (Integrály typu $\frac{f'(x)}{f(x)}$). Platí

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} f(x) = t \\ f'(x) dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln |f(x)| + c.$$

Příklad 135. Řešte $\int \operatorname{tg} x dx$.

Řešení. Platí

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Řešíme substitucí $\cos x = t$.

Integrace racionálně lomených funkcí

Poznámka 90. Každou racionální lomenou funkci $\frac{P(x)}{Q(x)}$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + R_1(x) + \cdots + R_n(x),$$

kde $S(x)$ je polynom a $R_1(x), \dots, R_n(x)$ jsou parciální zlomky. Na libovolném intervalu, který neobsahuje kořeny $Q(x)$, jsou tyto funkce spojité, takže k nim existuje primitivní funkce a platí

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x) dx + \int R_1(x) dx + \cdots + \int R_n(x) dx.$$

Poznámka 91 (Integrace parciálních zlomků s reálnými kořeny ve jmenovateli). Parciální zlomky $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$ integrujeme následovně:

i. je-li $k = 1$, pak triviálně

$$\int \frac{A}{x-\alpha} dx = A \ln |x-\alpha| + c.$$

ii. je-li $k \geq 2$, použijeme substituci:

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{(x-\alpha)^k} dx &= \left| \begin{array}{l} x-\alpha = t \\ dx = dt \end{array} \right| = A \int \frac{dt}{t^k} = A \int t^{-k} dt \\ &= A \cdot \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{A}{(1-k)t^{k-1}} + c = \frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + c. \end{aligned}$$

Příklad 136. Řešte $\int \frac{3x+16}{x^2-x-6} dx$.

Řešení. Rozkladem na parciální zlomky. Vede na ln.

Poznámka 92 (Integrace parciálních zlomků s komplexními kořeny ve jmenovateli). Parciální zlomky $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ integrujeme následovně:

1. je-li $p = 0$, pak $q > 0$, položíme $q = a^2, a > 0$. Je tedy

$$\frac{Mx+N}{(x^2+a^2)^n}.$$

Pak

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+a^2)^n} dx = M \underbrace{\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n} dx}_I + N \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx}_{II}.$$

I. Zlomky tvaru $\frac{x}{(a^2+a^2)^n}$ integrujeme následovně:

Neurčitý integrál

i. je-li $n = 1$, pak

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + a^2} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 + a^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + c = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + c.\end{aligned}$$

ii. je-li $n \geq 2$, pak

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} dx &= \left| \begin{array}{l} x^2 + a^2 = u \\ 2x dx = du \\ x dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right| = \int \frac{1}{u^n} \cdot \frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int u^{-n} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{u^{n-1}} + c \\ &= \frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + c.\end{aligned}$$

II. Označme

$$J_n(x, a) = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx.$$

Pak

$$J_1(x) = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c.$$

J_2 určíme rekurentně tak, že vyjádříme metodou *per partes* J_1 ($u = J_1$, $v' = 1$), J_3 tak, že vyjádříme metodou *per partes* J_2 , ...

2. je-li $p \neq 0$, upravíme zlomek tak, aby v čitateli byla derivace jmenovatele, tj.

$$\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} = r \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} + s \frac{1}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Bude tedy

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx = r \underbrace{\int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx}_I + s \underbrace{\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx}_{II}.$$

I. Integrál $\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx$ spočítáme obdobně jako první integrál v 1.

i. pro $n = 1$ je

$$\int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx = \ln(x^2 + px + q) + c.$$

ii. pro $n \geq 2$ použijeme substituci

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx &= \left| \begin{array}{l} x^2+px+q=u \\ (2x+p) dx = du \end{array} \right| = \int \frac{du}{u^n} \\ &= \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{u^{n-1}} + c = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + c. \end{aligned}$$

II. Integrál $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} dx$ převedeme substitucí na výpočet integrálu J_n .

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} dx &= \int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2\right]^n} dx = \left| \begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=u \\ dx=du \end{array} \right| \\ &= \int \frac{1}{(u^2+a^2)^n} du = J_n(u, a). \end{aligned}$$

Příklad 137. Řešte $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} dx = J_2$.

Řešení. Vyjádříme si *per partes* J_1 tak, že derivujeme celý výraz J_1 a integrujeme 1. Dostaneme rovnici v proměnné integrál. J_1 spočítáme snadno (vede na arctg).

Příklad 138. Řešte $\int \frac{5x+6}{x^2+28x+300} dx$.

Řešení. Do čitatele dostaneme derivaci jmenovatele. Protože nevychází konstantní člen v čitateli, „něco si půjčíme a vrátíme“. Zlomek se rozdělí na více sčítanců. Poslední z nich integrujeme tak, že ve jmenovateli doplníme na čtverec a vhodně vynásobíme tak, abychom dostali něco tvaru $x^2 + 1$.

Integrace goniometrických funkcí

Poznámka 93. Budeme vyšetřovat integrály typu

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

kde $R(\sin x, \cos x)$ je funkce v proměnných $\sin x, \cos x$. Substitucí $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ lze tento integrál vždy převést na integrál z racionální lomené funkce v proměnné t .

Je-li $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, pak ze vztahů v pravoúhlém trojúhelníku dostáváme

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Dále

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Pokud $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, pak $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$, a tedy

$$dx = \frac{2}{t^2 + 1} dt.$$

Příklad 139. Řešte $\int \frac{dx}{1 - \cos x + \sin x}$.

Řešení. Řešíme substitucí $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Ostatní funkce popř. odvodíme ze vztahů v pravoúhlém trojúhelníku.

Věta 191. Je-li funkce $R(\sin x, \cos x)$ lichá vzhledem k proměnné $\sin x$, používáme substituci $\cos x = t$.

Věta 192. Je-li funkce $R(\sin x, \cos x)$ lichá vzhledem k proměnné $\cos x$, používáme substituci $\sin x = t$.

Věta 193. Je-li funkce $R(\sin x, \cos x)$ sudá vzhledem k oběma proměnným, používáme substituci $\operatorname{tg} x = t$.

Příklad 140. Řešte $\int \frac{2 \cos x - \sin x}{\cos x - 2 \sin x} dx$.

Řešení. Řešíme substitucí $\operatorname{tg} x = t \implies x = \operatorname{arctg} t$. Ostatní funkce popř. odvodíme ze vztahů v pravoúhlém trojúhelníku.

Poznámka 94. Integrály $\int \sin^2 x dx$, $\int \cos^2 x dx$ neřešíme substitucí $\operatorname{tg} x = t$, nýbrž ze vzorce pro poloviční argument:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + c, \\ \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + c. \end{aligned}$$

Příklad 141. Řešte $\int \cos^2 x dx$.

Řešení. Vyjádříme si ze vzorce pro dvojnásobný argument.

Integrace některých iracionálních funkcí

Věta 194. Integrály tvaru

$$\int R(x, \sqrt[s]{x}) dx, \quad \text{kde } s \in \mathbb{N}, s \geq 2$$

řešíme substitucí $x = t^s$.

Věta 195. *Integrály tvaru*

$$\int S(x, \sqrt[s_1]{x}, \dots, \sqrt[s_k]{x}) dx, \text{ kde } k \in \mathbb{N}, s_i \geq 2$$

řešíme substitucí $x = t^s$, kde s je nejmenší společný násobek $s_1, \dots, s_k$.

Věta 196. *Integrály tvaru*

$$\int R(x, \sqrt[s]{ax+b}) dx, \text{ kde } s \in \mathbb{N}, s \geq 2, a, b \in \mathbb{R}$$

řešíme substitucí $t^s = ax + b$.

Věta 197. *Integrály tvaru*

$$\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \text{ kde } s \in \mathbb{N}, s \geq 2, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0$$

řešíme substitucí $t^s = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Věta 198 (Eulerovy substituce). *Integrály tvaru*

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \text{ kde } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

řešíme substitucemi

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \sqrt{|a|} \cdot t(x - \alpha) && \text{je-li } D > 0, \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \pm \sqrt{|a|} \cdot x \pm t && \text{je-li } D < 0, a > 0, \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \pm xt \pm \sqrt{c} && \text{je-li } c > 0. \end{aligned}$$

Pokud $b = 0$, řešíme integrály

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{k^2 - x^2}) dx &&& \text{substitucí } x = k \sin t, \\ \int R(x, \sqrt{x^2 + k^2}) dx &&& \text{substitucí } x = k \operatorname{tg} t, \\ \int R(x, \sqrt{x^2 - k^2}) dx &&& \text{substitucí } x = \frac{k}{\sin t}. \end{aligned}$$

Příklad 142. Řešte $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Příklad 143. Řešte $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2}}$.

Řešení. Řešíme substitucí $x = \sqrt{2} \operatorname{tg} t$.

Příklad 144. Řešte $\int \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1} dx, x \in (1, \infty)$.

Neurčitý integrál

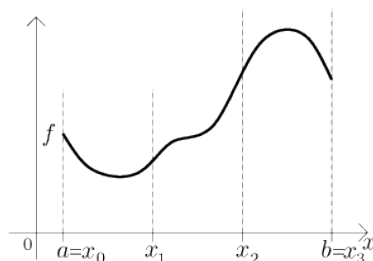
Řešení. Řešíme substitucí $x = \frac{1}{\sin t}$.

Poznámka 95. Přehled všech základních tabulkových integrálů a substitucí, které musíme umět, je k nalezení v příloze [B](#).

Určitý integrál

Poznámka 96. Supremum a infimum množiny jsme již zavedli v definici 258.

Definice 281. Dělením D uzavřeného intervalu $\langle a, b \rangle$ rozumíme každou konečnou množinu čísel $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ takových, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Intervaly $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle$ nazýváme **dělicí intervaly**, které označíme $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Body $x_0, \dots, x_n$ nazýváme **dělicí body** dělení D . Číslo $\max(x_i - x_{i-1}), i = 1, \dots, n$ nazýváme **normou dělení** D a označujeme $\nu(D)$. Množinu všech dělení na intervalu $\langle a, b \rangle$ označme $\mathcal{D}(a, b)$.



Obrázek 20 – Dělení $D = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$

Definice 282. Necht $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(a, b)$. Řekneme, že dělení D_2 je **zjemněním** dělení D_1 , jestliže $D_1 \subset D_2$.

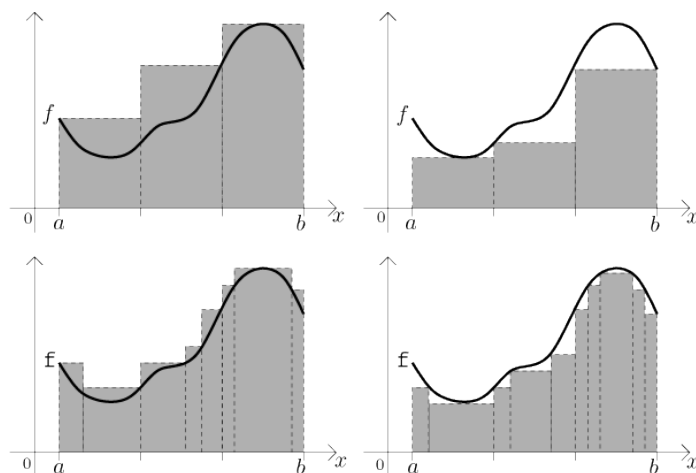
Definice 283. Necht $f(x)$ je omezená na $\langle a, b \rangle$, $D \in \mathcal{D}(a, b)$, $D = \{x_0, \dots, x_n\}$. Pak množina $\{f(x), x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle\}$ je pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$ neprázdná a omezená a tedy má supremum a infimum. Označme

$$m_i = \inf \{f(x), x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle\} \text{ pro } D = \{x_0, \dots, x_n\},$$

$$M_i = \sup \{f(x), x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle\} \text{ pro } D = \{x_0, \dots, x_n\}.$$

Číslo $S(D, f) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ (resp. $s(D, f) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$) je **horní** (resp. **dolní**) **součet funkce** $f(x)$ příslušný dělení D .

Určitý integrál



Obrázek 21 – Horní (vlevo) a dolní (vpravo) součty funkce $f(x)$

Poznámka 97. Platí $s(D, f) \leq S(D, f)$.

Věta 199. Nechť $f(x)$ je omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak $\{s(D, f); D \in \mathcal{D}(a, b)\}$ je shora omezená a množina $\{S(D, f); D \in \mathcal{D}(a, b)\}$ je zdola omezená.

Poznámka 98. Množina dolních součtů má supremum a množina horních součtů má infimum.

Definice 284. Nechť $f(x)$ je omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$. Označme

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \{s(D, f); D \in \mathcal{D}(a, b)\},$$

$$\int_a^b f(x) dx = \inf \{S(D, f); D \in \mathcal{D}(a, b)\}.$$

Číslo $\int_a^b f(x) dx$ (resp. $\int_a^b f(x) dx$) nazýváme **dolní** (resp. **horní**) **integrál** funkce $f(x)$ od a do b .

Věta 200. Nechť $f(x)$ je omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$

Definice 285. Nechť $f(x)$ je omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a, b \rangle$ (Riemmanovsky) **integrovatelná** (integrace schopna), jestliže

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Určitý integrál

Je-li $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ integrovatelná, klademe

$$\int_{\underline{a}}^b f(x) dx = \int_a^{\underline{b}} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Číslo $\int_a^b f(x) dx$ nazýváme **Riemannův integrál** funkce $f(x)$ od a do b . Pokud $\int_{\underline{a}}^b f(x) dx < \int_a^{\underline{b}} f(x) dx$, pak $f(x)$ není na intervalu $\langle a, b \rangle$ integrovatelná a $\int_a^b f(x) dx$ nedefinujeme.

Věta 201 (Newton-Leibnitzova věta). *Nechť $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$, $F(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Buď $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak platí:*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Věta 202. *Nechť $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak $f(x)$ je na intervalu $\langle a, b \rangle$ integrovatelná.*

Příklad 145. *Vypočtěte integrál $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$.*

Řešení. Platí

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Věta 203. *Nechť $f(x), f_1(x), \dots, f_n(x), g(x)$ jsou integrovatelné funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$ a $c; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Pak*

i. funkce $f(x) + g(x)$ je integrovatelná na int. $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

ii. funkce $c \cdot f(x)$ je integrovatelná na int. $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx,$$

iii. funkce $c_1 \cdot f_1(x) + \dots + c_n \cdot f_n(x)$ je integrovatelná na int. $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b [c_1 \cdot f_1(x) + \dots + c_n \cdot f_n(x)] dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + \dots + c_n \int_a^b f_n(x) dx.$$

Věta 204. *Nechť $f(x)$ je integrovatelná a nezáporná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak*

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Věta 205. Necht funkce $f(x), g(x)$ jsou integrovatelné na intervalu $\langle a, b \rangle$. Necht pro každé $x \in \langle a, b \rangle : f(x) \leq g(x)$. Pak

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Věta 206. Necht $a < b < c$ jsou reálná čísla a $f(x)$ je integrovatelná na intervalech $\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle$. Pak

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Definice 286. Funkce $f(x)$ se nazývá **po částech spojitá** na intervalu $\langle a, b \rangle$, jestliže je na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá s výjimkou konečného počtu bodů $c_1, \dots, c_n; a < c_1 < \dots < c_n < b$.

Věta 207. Necht funkce $f(x)$ je po částech spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, jako v definici 286. Pak

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x) dx.$$

Definice 287. Je-li $f(x)$ definována v čísle $a \in \mathbb{R}$, klademe

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Je-li $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$, definujeme

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Věta 208 (O substituci pro určité integrály). Necht $\varphi(t), \varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ má na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojitou derivaci $\varphi'(t)$ a necht $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Označme $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$. Pak platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt.$$

Poznámka 99. Ve větě 208 využíváme tzv. **transformace mezí**.

Příklad 146. Vypočtěte integrál $\int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)} dx$.

Řešení. Musíme provést transformaci mezí:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)} dx &= \left| \begin{array}{ll} t = x^2 + 1 & x = 2 \implies t = 5 \\ dt = 2x dx & x = 1 \implies t = 2 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_2^5 \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_2^5 = \frac{1}{2} \left(\frac{5^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \frac{2^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Věta 209 (O integraci *per partes* pro určité integrály). Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitě derivace $u'(x)$ a $v'(x)$. Pak platí

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

Příklad 147. Vypočtěte integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos \frac{x}{2} dx$.

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos \frac{x}{2} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos \frac{x}{2} & v = 2 \sin \frac{x}{2} \end{array} \right| \\ &= \left[x \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin \frac{x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - \left[-4 \cos \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \end{aligned}$$

Poznámka 100. Je-li $f(x)$ spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b \rangle$, je $\int_a^b f(x) dx$ obsah plochy omezené osou x , přímkami $x = a, x = b$ a grafem funkce $y = f(x)$. Platí tedy

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Příklad 148. Vypočtěte obsah plochy $M = \{[x, y]; y \geq x^2, y \leq 2x\}$.

Řešení. Nejprve určíme průsečíky funkcí x^2 a $2x$: $x_1 = 0, x_2 = 2$. Plochu spočítáme jako

$$\int_0^2 2x dx - \int_0^2 x^2 dx.$$

Příklad 149. Vypočtěte obsah kruhu o poloměru r .

Řešení. Počítáme $2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$.

Poznámka 101. Nechť je $f(x)$ spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a je dána množina bodů $M = \{[x, y]; x \in \langle a, b \rangle, y \in \langle y, f(x) \rangle\}$. Nechť M rotuje kolem osy x . Dostaneme rotační těleso, jehož objem je

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Příklad 150. Vypočtěte objem koule o poloměru r .

Řešení. Počítáme $\pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx$.

Poznámka 102. Nechť je $f(x)$ funkce se spojitou derivací na intervalu $\langle a, b \rangle$. Délka grafu

Určitý integrál

funkce $f(x)$ je

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Příklad 151. Spočítejte délku kružnice o poloměru r .

Řešení. Počítáme $2 \int_{-r}^r \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx$.

Poznámka 103. Necht $f(x)$ je funkce se spojitou derivací na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak plášť rotačního kužele, který vznikne rotací grafu $f(x)$ kolem osy x , má povrch

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Příklad 152. Určete povrch koule o poloměru r .

Řešení. Počítáme $S = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx$.

Kapitola 30

Kuželosečky

Definice 288. Necht je v $\mathbb{E}_2$ dána afinní soustava souřadnic $\langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$. Necht

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (5)$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 \neq 0$. Pak množinu všech bodů $[x, y] \in \mathbb{E}_2$, jejichž souřadnice vyhovují rovnici 5, nazýváme **kuželosečkou**. Rovnici 5 nazýváme **rovnicí kuželosečky**.

Definice 289. Necht k je kuželosečka s rovnicí 5. Pak matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

nazýváme **maticí kuželosečky k** .

Příklad 153. Napište matici kuželosečky $x^2 - 2xy + 3y + 1 = 0$.

Řešení. Z definice je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Poznámka 104. Rovnici kuželosečky lze zapsat pomocí její matice A jako

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Definice 290. Necht k o rovnici 5 je kuželosečka. Každou kuželosečku lze vhodnou transformací soustavy souřadnic převést na jednu z následujících tvarů, které nazýváme **kano-**

nickými rovnicemi kuželosečky.

- i. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (elipsa, a, b jsou její poloosy),
- ii. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ (imaginární elipsa),
- iii. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbola, a, b jsou její poloosy),
- iv. $y^2 = 2px, p > 0$ (parabola, p je její parametr),
- v. $y^2 = k^2x^2, k > 0$ (dvě různoběžky),
- vi. $y^2 = -k^2x^2, k > 0$ (bod),
- vii. $y^2 = r^2, r > 0$ (dvě různé rovnoběžky),
- viii. $y^2 = -r^2, r > 0$ (prázdná množina),
- ix. $y^2 = 0$ (dvojná přímka).

Příklad 154. Je dána kuželosečka $4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$. Určete, jestli je to elipsa.

Řešení. Doplněním na čtverec pro x a pro y .

Definice 291. Kuželosečka je **singulární**, jestliže determinant její matice je nulový. V opačném případě je **regulární**.

Definice 292. Vyhovuje-li rovnici kuželosečky alespoň jeden bod, je to kuželosečka **bodově reálná**. V opačném případě je **formálně reálná**.

Definice 293. Elipsa, jejíž poloosy mají stejnou velikost, se nazývá **kružnice**.

Definice 294. Přímka, podle níž je kuželosečka souměrná, se nazývá její **osou**.

Definice 295. **Elipsa** je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou různých bodů v rovině, které se nazývají **ohniska**, konstantní součet vzdáleností.

Příklad 155. Určete středovou rovnici elipsy $5x^2 + 3y^2 + 20x - 24y + 38 = 0$.

Řešení. Doplněním na čtverec.

Definice 296. **Hyperbola** je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou různých bodů v rovině, které se nazývají **ohniska**, konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností.

Příklad 156. Je dána hyperbola $k : 9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$. Najděte její středovou rovnici, střed, poloosy, ohniska, vrcholy, rovnice asymptot a hyperbolu načrtněte.

Řešení. Doplníme na čtverec a vydělíme, abychom na pravé straně rovnice měli jedničku. Zbytek z vlastností hyperboly.

Definice 297. Parabola je množina všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu, který se nazývá **ohnisko** a pevné přímky, která se nazývá **řídící přímka**, na níž tento bod neleží, stejnou vzdálenost.

Příklad 157. Určete vrchol, ohnisko, parametr a řídící přímku paraboly $k : y^2 - 7x - 6y - 19 = 0$.

Řešení. Doplněním na čtverec.

Poznámka 105. Pro přehled s rovnicemi, obrázky a popisem všech prvků těchto kuželoseček viz přílohu C.

Definice 298. Přímka, která má s regulární kuželosečkou společný právě jeden bod T a neobsahuje žádný bod vnitřní oblasti kuželosečky, se nazývá její **tečnou** a bod T jejím **bodem dotyku**.

Definice 299. Přímka, která má s regulární kuželosečkou společné právě dva body T, T' , se nazývá její **sečnou** a úsečka TT' **tětivou**.

Věta 210. Necht 5 je obecná rovnice kuželosečky a necht tečna t této kuželosečky se jí dotýká v bodě $T[x_r, y_r]$. Pak tečna t má rovnici

$$(a_{11}x_r + a_{12}y_r + a_{13})x + (a_{12}x_r + a_{22}y_r + a_{23})y + a_{13}x_r + a_{23}y_r + a_{33} = 0. \quad (6)$$

Poznámka 106. Rovnici 6 lze zapsat jako

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Věta 211 (Rovnice tečen regulárních kuželoseček v základní poloze). Necht je dána kuželosečka a její tečna s bodem dotyku $T[x_r, y_r]$. Pak tečna má rovnici

- i. kružnice se středem v $S[m, n] : (x - m)(x_r - m) + (y - n)(y_r - n) = r^2$,
- ii. elipsa se středem v $S[m, n] : \frac{(x-m)(x_r-m)}{a^2} + \frac{(y-n)(y_r-n)}{b^2} = 1$,
- iii. hyperbola se středem $S[m, n] : \frac{(x-m)(x_r-m)}{a^2} - \frac{(y-n)(y_r-n)}{b^2} = 1$,
- iv. parabola s vrcholem $V[m, n] : (y - n)(y_r - n) = p(x + x_r - 2m)$.

Příklad 158. Napište rovnice tečen ke kuželosečce $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ v průsečíku s přímkou $y = x + 3$.

Řešení. Nejprve najdeme průsečík $P[p_1, p_2]$ (vyřešíme soustavu těchto dvou rovnic). Potom

má rovnice tečen tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Definice 300. Směr v rovině určený vektorem $\mathbf{u}(u_1, u_2) \neq \mathbf{0}$ nazveme **asymptotickým směrem** kuželosečky o rovnici 5, jestliže

$$a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2 = 0.$$

Příklad 159. Určete asymptotické směry kuželosečky $x^2 + 4xy + y^2 - 7x - 7 = 0$.

Řešení. Hledáme směr $\mathbf{u}(u_1, u_2)$. Po dosazení do rovnice kuželosečky (bereme jen členy, ve kterých je x, y dvakrát) dostáváme $u_1^2 + 4u_1u_2 + u_2^2 = 0$. Zvolíme jednu z proměnných a rovnici vyřešíme.

Definice 301. Bod S je středem kuželosečky k právě tehdy, když $\forall X \in k : \exists X' \in k : S$ je středem XX' .

Věta 212. Bod $S[s_1, s_2]$ je střed kuželosečky o rovnici 5 právě tehdy, když

$$a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13} = 0,$$

$$a_{12}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23} = 0,$$

Definice 302. Jestliže střed kuželosečky na ní leží, pak je to **singulární bod**.

Příklad 160. Určete střed a singulární body kuželosečky $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

Řešení. Střed kuželosečky vyhovuje rovnici

$$A \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

kde A je matice dané kuželosečky. Pokud daný bod navíc vyhovuje rovnici

$$A \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

je to singulární bod.

Příklad 161. Je dána kuželosečka $y^2 - xy - 5x + 7y + 10 = 0$. Určete:

- a. zda je regulární / singulární,
- b. asymptotické směry,
- c. středy,
- d. singulární body a
- e. druh kuželosečky.

Řešení. Nechť A je matice dané kuželosečky, $\bar{A}$ zmenšená matice kuželosečky, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, 0)^T$, $\mathbf{t} = (s_1, s_2, 0)^T$.

- a. Spočtením determinantu A .
- b. Je řešením rovnice $\bar{A}\mathbf{u} = 0$.
- c. Je řešením rovnice $A\mathbf{s} = 0$.
- d. je řešením rovnice $A\mathbf{t} = 0$.
- e. Doplněním na čtverec.

Definice 303. Kulová plocha (resp. koule) se středem S a poloměrem $r > 0$ je množina všech bodů v prostoru, jejichž vzdálenost od S je r (resp. menší nebo rovna r).

Definice 304. Tečná rovina kulové plochy je taková rovina, která má s kulovou plochou právě jeden společný bod.

Kapitola 31

Nezařazené vykřičníkové příklady

31.1 Algebraické výrazy

Příklad 162. Rozložte $2x^2 - 3x + 1$.

Řešení. Doplněním na čtverec.

Příklad 163. Odstraňte odmocniny ze jmenovatele: $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Řešení. Platí

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x},$$

je-li $x > 0$.

Příklad 164. Zakreslete na číselné ose

a. racionální číslo $-4/3$.

b. iracionální číslo $\sqrt{3}$.

Řešení.

a. Z podobnosti trojúhelníků.

b. Z Pythagorovy věty.

Příklad 165. Upravte výraz $d(x) = (x + 16)(x + 17)(x + 18) - (x + 17)^2(x + 19)$.

Řešení. Výhodnou volbou $x + 17 = t$ dostaneme $d(x) = -t(2t + 1) = (-x - 17)(2x + 35)$.

Příklad 166. Ve výrazu $V(n + 1)$ vyčleňte daný výraz $V(n) = n^3 + 2n$.

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} V(n+1) &= (n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\ &= \underbrace{n^3 + 2n}_{V(n)} + 3n^2 + 3n + 3 = V(n) + 3(n^2 + n + 1). \end{aligned}$$

Příklad 167. V $\mathbb{R}$ zjednodušte

$$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Řešení. Platí $\sqrt{x^2} = |x|$.

Příklad 168. Rozložte $x^2 - 5x + 6$.

Řešení. Doplněním na čtverec.

Příklad 169. Najděte nejmenší hodnotu výrazu $x^2 + 16x - 17$.

Řešení. Doplněním na čtverec. Minimum nastane tehdy, když je čtverec nulový.

31.2 Rovnice a nerovnice, matice

Příklad 170. V $\mathbb{R}$ řešte $x^2 - 5x \geq 0$.

Příklad 171. V $\mathbb{R}$ řešte

$$\frac{(4-x)(6+x)x}{2-x} \leq 0.$$

Příklad 172. V $\mathbb{R}$ řešte

$$\frac{(x+1)(x-2)^2}{(3-x)^3(4+x)^4} \leq 0.$$

Příklad 173. V $\mathbb{R}$ řešte rovnici $|3x - 5| = 2x + 10$.

Řešení. Rozdělíme na případy, kdy je výraz v absolutní hodnotě menší / větší než 0 a dále řešíme jako normálně.

Příklad 174. V $\mathbb{R}$ řešte $2|4 + 3x| \leq 6x + 11$.

Řešení. Rozdělíme na případy, kdy je výraz v absolutní hodnotě menší / větší než 0 a dále řešíme jako normálně.

Příklad 175. V $\mathbb{R}$ řešte $|x + 2| + |x - 2| = 2x + 2$.

Řešení. Rozdělíme na případy, kdy je výraz v absolutní hodnotě menší / větší než 0 a dále řešíme jako normálně.

Příklad 176. V $\mathbb{R}$ řešte $|3x - 2| < 5 + |x + 1|$.

Příklad 177. V $\mathbb{R}$ řešte $x^2 - 6x + 8 > 0$.

Příklad 178. Danou matici převedte na schodovitý tvar a určete její hodnotu.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení. K jednotlivým řádkům přičítáme násobky jiných, aby nám vyšel schodovitý tvar.

Příklad 179. V $\mathbb{R}$ řešte:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12. \end{aligned}$$

Řešení. Převedeme na matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \end{array} \right)$$

a řešíme Gaussovou eliminační metodou.

Příklad 180. V $\mathbb{R}$ řešte

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení. Převedeme na matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

a řešíme Gaussovou eliminační metodou.

Příklad 181. Vypočítejte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Od druhého, třetího a čtvrtého řádku odečteme ten první (čímž se determinant nezmění) a využijeme Laplaceův rozvoj podle prvního sloupce. Je tedy

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = 1$$

Příklad 182. V $\mathbb{R}$ řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 &= 0, \\ x_1 + x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Řešení. Řešme Cramerovým pravidlem. Soustavu přepíšme jako matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Platí $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$, kde A_i značí matici, kterou jsme získali z matice A nahrazením i -tého sloupce za vektor „pravé strany“ soustavy rovnic.

Příklad 183. V $\mathbb{R}$ řešte soustavu rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x - y &= 2, \\ ax + y &= 4. \end{aligned}$$

Řešení. Buď Gaussovou eliminací (od druhého řádku odečteme a -násobek prvního řádku) nebo Cramerovým pravidlem (to však funguje jen tehdy, když $\det A \neq 0$, případ $a = 0$ tedy musíme dořešit Gaussovou eliminací).

Příklad 184. V $\mathbb{R}$ řešte soustavu rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} ax_1 - ax_2 &= 0, \\ -a^2x_2 + x_3 &= a, \\ ax_1 + x_3 &= a^2. \end{aligned}$$

Řešení. Buď Gaussovou eliminační metodou nebo Cramerovým pravidlem. Nesmíme zapomenout rozdělit na případy, kdy by některé výrazy nemusely být definovány.

Příklad 185. V $\mathbb{Z}$ řešte $5x - 13y = 2$.

Řešení. 1. způsob: Uhodnutí jednoho kořene: $x_0 = 3, y_0 = 1$. Pak další řešení je tvaru $x = x_0 - \frac{b}{d}r, y = y_0 + \frac{a}{d}r$, kde $r \in \mathbb{Z}$ a d značí největšího společného dělitele koeficientů u x a y . Je tedy

$$\begin{aligned}x &= 3 - \frac{-13}{1}r = 3 + 13r, \\y &= 1 + \frac{5}{1}r = 1 + 5r,\end{aligned}$$

kde $r \in \mathbb{Z}$.

2. způsob: Modifikace Euklidova algoritmu: z rovnice osamostatníme tu neznámou, jejíž koeficient je v absolutní hodnotě menší.

$$\begin{aligned}x &= \frac{13y+2}{5} = \frac{10y}{5} + \frac{3y+2}{5} = 2y + \underbrace{\frac{3y+2}{5}}_{\in \mathbb{Z}} \\ \exists u \in \mathbb{Z} : u &= \frac{3y+2}{5} \implies 3y+2 = 5u \iff y = \frac{5u-2}{3} = u + \underbrace{\frac{2u-2}{3}}_{\in \mathbb{Z}} \\ &\dots \\ \exists w \in \mathbb{Z} : w &= \frac{v}{2} \implies v = 2w \implies 2 \mid v.\end{aligned}$$

Nyní zpětně dosazujeme:

$$\begin{aligned}u &= \frac{3(2w)+2}{2} = \frac{6w+2}{2} = 3w+1 \\ y &= \frac{5u-2}{3} = \frac{5 \frac{3w+1}{2} - 2}{3} = 5w+1 \\ x &= \frac{13 \frac{5w+1}{2} + 2}{5} = 13w+3\end{aligned}$$

Příklad 186. V $\mathbb{R}$ řešte rovnici $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$.

Řešení. Reciproká rovnice. Vydělíme x^2 , neboť 0 není kořen a zavedeme substituci $x + \frac{1}{x} = t$ (ostatní mocniny dopočteme). V rovnici vytkneme opakující se členy tak, abychom mohli substituci použít. Nezapomeneme zpětně dosadit.

Příklad 187. Přibližně určete reálný kořen polynomu $x^3 + x - 3$.

Řešení. Postupně dosazujeme nějaké hodnoty, dokud nezjistíme, že mezi nějakými dvěma musí graf funkce procházet nulou (jedna je záporná a jedna je kladná). Takto postupujeme dál.

Příklad 188. V $\mathbb{R}$ řešte $1/(5^{2x-4}) = 125$.

Řešení. Převědeme na stejný základ: $5^{4-2x} = 5^3$ a přesuneme se do rovnosti exponentů: $4 - 2x = 3$.

Příklad 189. V $\mathbb{R}$ řešte rovnici $4^x + 2^x - 6 = 0$.

Řešení. Použijeme substituci $2^x = t$.

Příklad 190. V $\mathbb{R}$ řešte $\log(4x + 6) = 1 + \log(2x - 1)$.

Řešení. Určíme podmínky pro argument (argument je větší než 0). Potom úpravou chceme dostat rovnost dvou logaritmů, abychom se mohli přesunout do rovnosti argumentů.

Příklad 191. V $\mathbb{R}$ řešte rovnici $x^{3+2\log_5 x} = 25x^{2+\log_5 x}$.

Řešení. Upravíme a rovnici zlogaritmuje.

Příklad 192. V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $3^{2x+5} \leq 3^{x+2} + 2$.

Řešení. Užijeme výhodné substituce $a = 3^{x+2}$.

Příklad 193. V $\mathbb{R}$ řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^{\log y} &= 4, \\ xy &= 40. \end{aligned}$$

Řešení. Druhou rovnici zlogaritmuje a využijeme substituce $a = \log x, b = \log y$.

Příklad 194. V $\mathbb{R}$ řešte rovnici $\sin x = \frac{1}{2}$.

Řešení. Z náčrtku jednotkové kružnice zjistíme $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ a $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

Příklad 195. V $\mathbb{R}$ řešte rovnici $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Řešení. Z náčrtku zjistíme $x_1 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ a $x_2 = \frac{2\pi}{3} + k\pi$.

Příklad 196. V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

31.3 Důkazy

Příklad 197. Dokažte, že je-li n sudé, pak i n^2 je sudé.

Řešení. Přímým důkazem. Nechť n je sudé přirozené číslo, tedy lze jej zapsat ve tvaru $2k, k \in \mathbb{N}$. Pak $n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2l, 2l \in \mathbb{N}$, tedy n^2 je sudé.

Příklad 198. Dokažte, že je-li n^2 sudé, je i n sudé.

Řešení. Nepřímým důkazem. Obměna: Je-li n liché, je i n^2 liché. Obdobně jako v příkladu 197.

Příklad 199. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: n je sudé právě tehdy, když n^3 je sudé.

Řešení. Musíme dokázat oba směry implikace zvlášť.

Příklad 200. Dokažte, že každým bodem roviny lze vést k dané přímce nejvýše jednu kolmici.

Řešení. Sporem. Předpokládáme platnost negace a dojdeme ke sporu. Musí tedy platit původní výrok.

Příklad 201. Dokažte, že $\sqrt{2}$ je iracionální.

Řešení. Sporem.

Příklad 202. Dokažte pro všechna $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Řešení. Matematickou indukcí.

1. $n = 1$: $1 = 1$

2. Předpokládáme platnost pro n a dokážeme, že pak platí i pro $n + 1$.

31.4 Kombinatorická geometrie

Příklad 203. Odvoďte vztah pro počet úhlopříček v konvexním n -úhelníku.

Řešení. Odvodíme rekurentní vztah. Je dán n -úhelník a zjistíme, kolik přibude úhlopříček, přidáme-li jeden vrchol. Přibude $n - 3$ úhlopříček a z jedné strany se stane úhlopříčka. Celkem tedy přibude $n + 1 - 3 + 1 = n - 1$ úhlopříček. Nyní odvodíme explicitní vztah:

$$\begin{aligned} u_3 &= 0, \\ u_4 &= 2 = u_3 + 2, \\ u_5 &= 5 = u_4 + 3, \\ u_6 &= 9 = u_5 + 4, \\ &\dots = \dots, \\ u_{n-1} &= u_{n-2} + (n - 3), \\ u_n &= u_{n-1} + (n - 2). \end{aligned}$$

Sečtením všech řádků a úpravou dostaneme $u_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

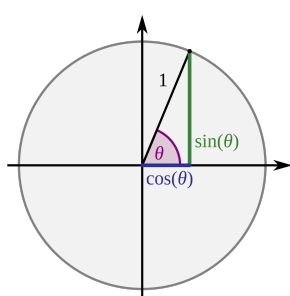
Příklad 204. V rovině je dáno n přímek tak, že žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprochází jedním bodem. Určete, na kolik částí rozdělují rovinu.

Nezařazené vykřičníkové příklady

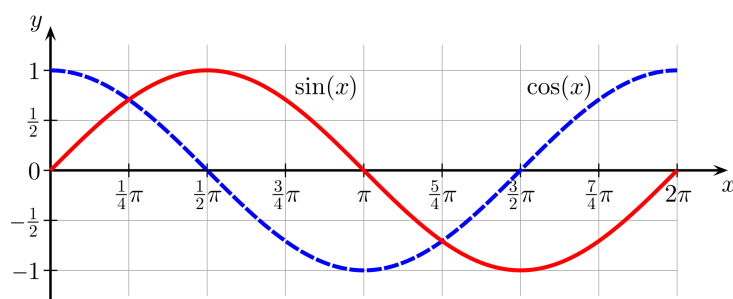
Řešení. Přidáme-li $n + 1$. přímku, protne n přímek v n bodech. Je rozdělena na $n + 1$ částí, takže přibude $n + 1$ částí. Opět odvodíme rekurentní a explicitní vzorec.

Příloha A

Goniometrické funkce

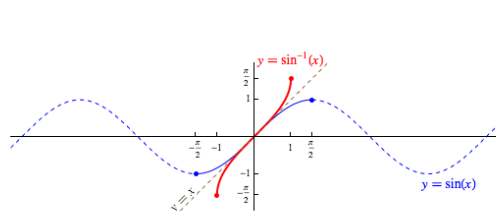


(a) Jednotková kružnice

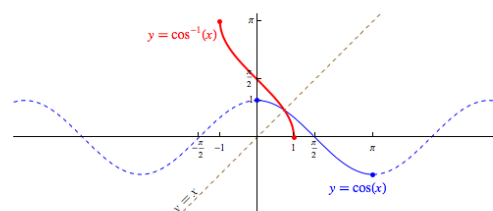


(b) Průběh funkcí sin a cos

Obrázek 22 – Funkce sin a cos



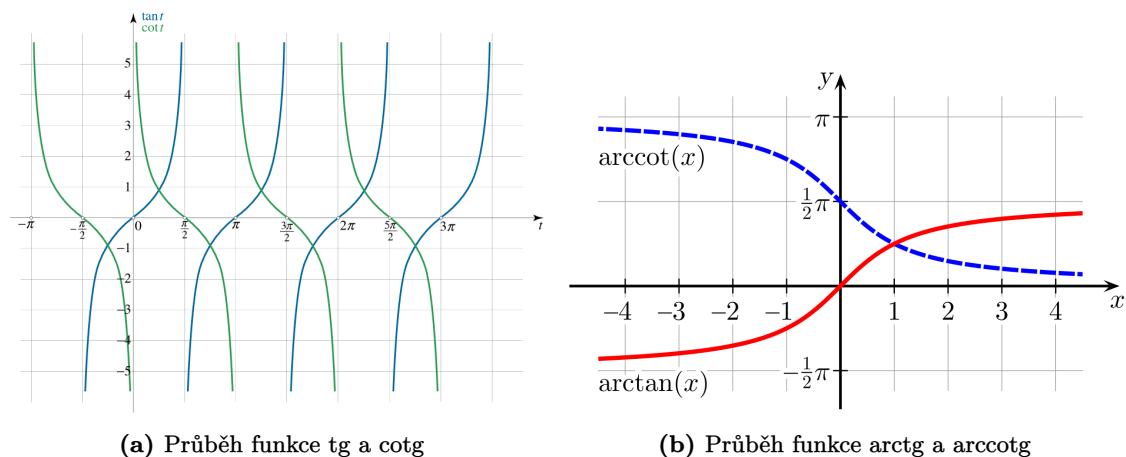
(a) Průběh funkce arcsin



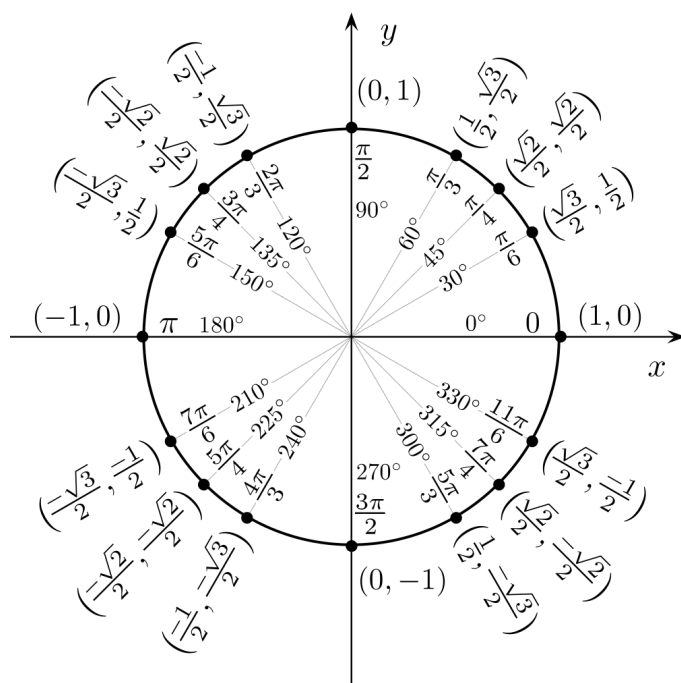
(b) Průběh funkce arccos

Obrázek 23 – Funkce arcsin a arccos

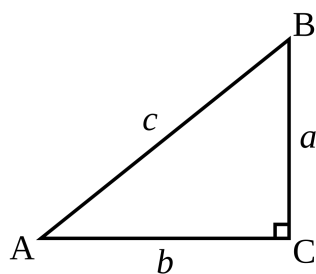
Goniometrické funkce



Obrázek 24 – Funkce $\tan$ a $\cot$



Obrázek 25 – Jednotková kružnice s hodnotami $(\cos \varphi, \sin \varphi)$



Obrázek 26 – Pravoúhlý trojúhelník s přeponou c

Poznámka 107. V obrázku 25 jsou uvedeny hodnoty funkcí sinus a kosinus ve tvaru

komplexního čísla, víme totiž

$$a = |a| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

pro nějaké $a \in \mathbb{C}$. Jelikož se jedná o jednotkovou kružnici, kde platí $|a| = 1$, máme

$$a = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Pokud chápeme komplexní číslo jako uspořádanou dvojici $(k, l) = k + il$, dobereme se k zápisu, jenž je použit v obrázku.

Všimněme si navíc, že platí

$$k^2 + l^2 = 1 \quad \forall (k, l).$$

Poznámka 108. V obrázku 26 platí pro úhel $\alpha = \sphericalangle BAC$:

- i. $\sin \alpha = \frac{a}{c}$,
- ii. $\cos \alpha = \frac{b}{c}$,
- iii. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$,
- iv. $\operatorname{arctg} \alpha = \frac{b}{a}$.

Poznámka 109 (Základní hodnoty goniometrických funkcí).

β [°]	0	30	45	60	90	180	270	360
α [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{cotg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Poznámka 110. Pro zajímavou animaci viz [tento odkaz](#).

Poznámka 111. Očividně platí následující věty (plyne z grafů jednotlivých funkcí nebo přímo z definice).

Věta 213. $\forall x \in \mathbb{R}$:

- i. $\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,
- ii. $\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Věta 214. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$:

- i. $\operatorname{tg} x = -\operatorname{cotg} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$,
- ii. $\operatorname{cotg} x = -\operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Věta 215. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$.

Poznámka 112. Funkce sinus a kosinus lze také definovat předpisy

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

kde $x \in \mathbb{R}$.

Příloha B

Integrály

Tabulkové integrály

$$\begin{array}{lll} \int 0 \, dx = c & \int 1 \, dx = x + c & \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \\ \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c & \int e^x \, dx = e^x + c & \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \\ \int \sin x \, dx = -\cos x + c & \int \cos x \, dx = \sin x + c & \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c & \int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \operatorname{arctg} x + c \end{array}$$

Integrály řešené jinak než substitucí

integrál	řešení
$\int \frac{A}{x-\alpha} \, dx$	$\rightarrow A \ln x-\alpha + c$
$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \, dx$	$\rightarrow$ <i>per partes</i> vyjádříme J_1 ($u = J_1, v' = 1$)
$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \, dx$	$\rightarrow$ do čitatele dostaneme derivaci jmenovatele, vede na $\ln$
$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \, dx$	$\rightarrow$ doplníme na čtverec, vede na arctg
$\int \sin^2 x \, dx, \int \cos^2 x \, dx$	$\rightarrow$ pomocí vzorce pro poloviční argument

Integrály řešené substitucí

integrál	příklad	substituce
$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n} dx$	$\int \frac{5}{x-3} dx$	$\longrightarrow x-\alpha=t$
$\int \frac{Mx+N}{(x^2+\alpha^2)^k} dx$	$\int \frac{3x-8}{(x^2+4)^3} dx$	$\longrightarrow x^2+\alpha^2=t$
$\int R(\sin x, \cos x) dx$	$\int \frac{dx}{1-\cos x+\sin x}$	$\longrightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2}=t$
$\int R(\sin x, \cos x) dx$ – lichá v prom. $\sin x$	$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$	$\longrightarrow \cos x=t$
$\int R(\sin x, \cos x) dx$ – lichá v prom. $\cos x$	$\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin^3 x} dx$	$\longrightarrow \sin x=t$
$\int R(\sin x, \cos x) dx$ – sudá v obou prom.	$\int \frac{2\cos x - \sin x}{\cos x - 2\sin x} dx$	$\longrightarrow \operatorname{tg} x=t$
$\int R(x^2, \sqrt[3]{x}) dx$	$\int \frac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} dx$	$\longrightarrow x=t^s$
$\int R(x, \sqrt[s]{x}, \dots, \sqrt[s]{x}) dx$	$\int \frac{1+x-\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}} dx$	$\longrightarrow x=t^{\operatorname{nsn}(s_1, \dots, s_k)}$
$\int R(x, \sqrt{ax+b}) dx$	$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$	$\longrightarrow ax+b=t^s$
$\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$	$\int \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$	$\longrightarrow \frac{ax+b}{cx+d}=t^s$
$\int R(x, \sqrt{k^2-x^2}) dx$	$\int x\sqrt{4-x^2} dx$	$\longrightarrow x=k\sin t$
$\int R(x, \sqrt{x^2+k^2}) dx$	$\int x\sqrt{x^2+4} dx$	$\longrightarrow x=k\operatorname{tg} t$
$\int R(x, \sqrt{x^2-k^2}) dx$	$\int \frac{1}{x} \sqrt{x^2-1} dx$	$\longrightarrow x=\frac{k}{\sin t}$

Vzorce pro využití určitého integrálu

- obsah pod grafem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

- objem rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce $f(x)$ kolem osy x na intervalu $\langle a, b \rangle$

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Integrály

- délka grafu funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

- obsah pláště rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce $f(x)$ kolem osy x na intervalu $\langle a, b \rangle$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

Příloha C

Kuželosečky

Označení

Obecná rovnice kuželosečky:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Matice kuželosečky:

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Diskriminant kuželosečky:

$$\Delta = \det K$$

Diskriminant kvadratických členů (malý diskriminant):

$$\delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Regulární kuželosečky

Platí $\Delta \neq 0$. (Hodnost matice K je 3.)

- $h(A) = 2$: středové ($\delta \neq 0$):

Kuzelosecky

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{imaginární elipsa} \quad \begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \delta > 0, \Delta > 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{elipsa} \quad \begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \delta > 0, \Delta < 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{hyperbola} \quad \begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \delta < 0, \Delta > 0$$

- $h(A) = 1$: **nestředové** ($\delta = 0$):

$$y^2 - 2px = 0 \quad \text{parabola} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm p \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm p & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ nebo } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm p \\ 0 & \pm p & 0 \end{pmatrix} \quad \delta = 0, \Delta < 0$$

Singulární kuzelosecky

Platí $\Delta = 0$. (Hodnost matice K je menší než 3.)

- $h(K) = 2, h(A) = 2$: **různoběžky** ($\delta \neq 0$):

$$x^2 - k^2 y^2 = 0 \quad \text{dvě různoběžky} \quad \begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \delta < 0, \Delta = 0$$

$$x^2 + k^2 y^2 = 0 \quad \text{bod} \quad \begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \delta > 0, \Delta = 0$$

- $h(A) = 1$: **rovnoběžky** ($\delta = 0$):

$$x^2 - r^2 = 0 \quad \text{dvě různé rovnoběžky} \quad \begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix} \quad \delta = 0, \Delta = 0$$

$$x^2 + r^2 = 0 \quad \text{prázdná množina} \quad \begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + \end{pmatrix} \quad \delta = 0, \Delta = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \text{přímka} \quad \begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \delta = 0, \Delta = 0$$

Elipsa

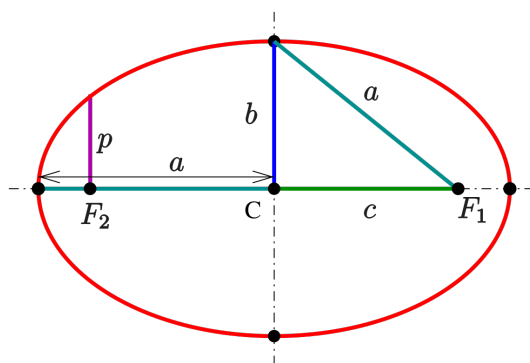
Množina všech bodů X v rovině, které mají od dvou bodů F_1, F_2 (ohnisk) konstantní vzdálenost $2a$:

$$|XF_1| + |XF_2| = 2a,$$

přičemž $|F_1F_2| < 2a$ (neboli $e < a$). Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic tak, aby $F_1 = [-e, 0], F_2 = [e, 0], X[x, y]$, pak postupnou úpravou dostaneme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- hlavní, vedlejší vrcholy
- F_1, F_2 ohniska
- a hlavní poloosa
- b vedlejší poloosa
- c (značíme e) excentricita, platí $a^2 = b^2 + e^2$
- numerická excentricita $\varepsilon = e/a$
- C (značíme S) střed



Parabola

Množina všech bodů X v rovině, které mají od přímky d (řídící přímky) a bodu F (ohniska) stejnou vzdálenost:

$$|XF| = |Xd|.$$

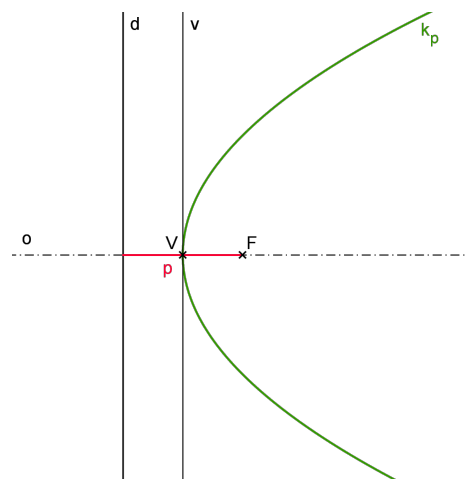
Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic tak, aby $d : x + e = 0, F = [e, 0]$, pak postupnou úpravou dostaneme

$$y^2 = 4ex.$$

Označíme-li vzdálenost ohniska od řídící přímky jako $p = 2e$, dostaneme rovnici tvaru

$$y^2 = 2px.$$

- V vrchol
- F ohnisko
- d řídící přímka
- p parametr
- o osa



Poznámka 113 (Rovnice řídící přímky). Parabola s vrcholem v bodě $V[m, n]$ má rovnici

$$x = m - \frac{p}{2}.$$

Poznámka 114.

- $y^2 = 2px$ – řídící přímka je rovnoběžná s osou y
- $x^2 = 2py$ – řídící přímka je rovnoběžná s osou x

Hyperbola

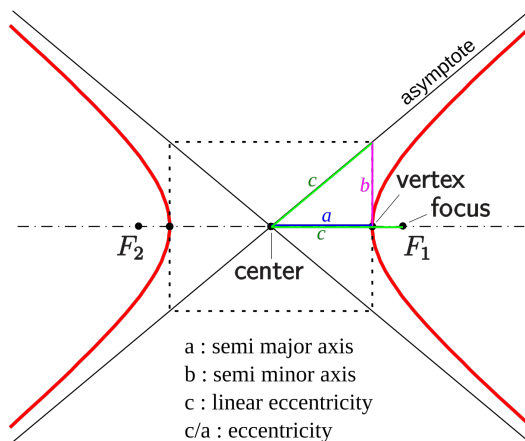
Množina všech bodů X v rovině, které mají od dvou bodů F_1, F_2 (ohnisk) konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdálenosti $2a$:

$$||F_1X| - |F_2X|| = 2a.$$

Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic tak, aby $F_1[-e, 0], F_2[e, 0], X[x, y]$, postupnou úpravou dostaneme

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- S střed
- F_1, F_2 ohniska
- hlavní, vedlejší vrcholy
- asymptoty
- a hlavní poloosa
- b vedlejší poloosa
- e excentricita, platí $e^2 = a^2 + b^2$



Seznam obrázků

1	Vennovy diagramy pro dvě, tři a čtyři množiny	3
2	Klasifikace úhlů podle velikosti	18
3	Dvojice úhlů	18
4	Trojúhelník s vnitřními (α, β, γ) a vnějšími $(\alpha', \beta', \gamma')$ úhly	19
5	Součet úhlů v trojúhelníku	19
6	Euklidova věta o výšce	21
7	Čtyřúhelník $ABCD$	22
8	Obvodový a středový úhel, Thaletova kružnice	24
9	Úsekový úhel	25
10	Graf $2 - x + 1 $	32
11	Graf $-2x^2 + x - 1$	32
12	Grafy funkcí $2x - 1$ a $\frac{x+1}{2}$	33
13	Graf konstantní (modře) a lineární (červeně) funkce	42
14	Grafy různých kvadratických funkcí	43
15	Grafy funkcí tvaru x^n	45
16	Grafy různých lineárně lomených funkcí	46
17	Grafy různých mocninných funkcí	49
18	Grafy některých exponenciálních funkcí	52
19	Grafy funkcí $2x - 1$ a $\frac{x+1}{2}$	54
20	Dělení $D = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$	135
21	Horní (vlevo) a dolní (vpravo) součty funkce $f(x)$	136
22	Funkce $\sin$ a $\cos$	154
23	Funkce $\arcsin$ a $\arccos$	154
24	Funkce $\tan$ a $\cot$	155
25	Jednotková kružnice s hodnotami $(\cos \varphi, \sin \varphi)$	155
26	Pravoúhlý trojúhelník s přeponou c	155

Matematika

Dominik Doležel, Honza Romanovský *a kolektiv.*

Děkujeme všem, kteří se podíleli na korektuře.

Vysázeno v L^AT_EXu.

K nalezení online na github.com/DominikDolezel/maturita_m.

Pokud najdete chybu nebo máte jinou připomínku, napište nám na dominik.dolezel@email.cz.

Brno, 2025