

Matematická analýza I

Zápisky z přednášky doc. Miroslava Zeleného

Dominik Doležel

Kapitola 1

Logika, množiny a základní číselné obory

1.1 Logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé), nebo že neplatí (je nepravdivé).

Příklad.

- Číslo čtyři je sudé. (pravda)
- Vídeň je hlavní město ČR. (nepravda)
- Ahoj! (není výrok)
- π^π je iracionální. (je výrok, ale nevíme, jestli je to pravda)

Definice 1. Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A .

A	$\neg A$
0	1
1	0

Definice 2. Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B .

Definice 3. Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B .

Definice 4. Implikací $A \implies B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A , potom platí výrok B .

Výroku A v implikaci se říká **premise**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A .

Definice 5. Ekvivalencí $A \iff B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B .

(Platnost výroku) A je **nutnou a postačující** podmínkou (platnosti výroku) B .

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \iff B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Výroková forma V je výraz, který má konečný počet proměnných, přičemž když za tyto proměnné dosadíme prvky z daného oboru, obdržíme výrok.

Poznámka 1 (Vytváření nových výroků). Platí následující:

- (i) $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- (ii) $((A \wedge B) \wedge C) \iff (A \wedge (B \wedge C))$
- (iii) $((A \vee B) \vee C) \iff (A \vee (B \vee C))$
- (iv) $(\neg(A \Rightarrow B)) \iff (A \wedge \neg B)$
- (v) $(\neg(A \vee B)) \iff (\neg A \wedge \neg B)$
- (vi) $(A \iff B) \iff ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

Příklad. Výrok *Kočka leze dírou, pes oknem, nebude-li pršet, nezmoknem.* znegujeme jako *Kočka neleze dírou nebo pes neleze oknem nebo (nebude pršet a zmokneme).*

Definice 6. Necht V je výroková forma s jednou proměnnou.

- (i) Výrok „Pro každé x platí $V(x)$.“ symbolicky zapisujeme ve tvaru

$$\forall x : V(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným kvantifikátorem**.

- (ii) Výrok „Existuje x takové, že platí $V(x)$.“ zapisujeme ve tvaru

$$\exists x : V(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním kvantifikátorem**.

Příklad. $V(x) : x < 3, x \in \mathbb{N}$ je výroková forma. $V(1), V(3)$ jsou výroky.

Označení (Kvantifikátor s podmínkou). Nechť V, P jsou výrokové formy s jednou proměnnou a M je množina. Pak

$$\forall x \in M, P(x) : V(x)$$

znamená

$$\forall (x \in M \wedge P(x)) \implies V(x),$$

podobně

$$\exists x \in M, P(x) : V(x)$$

znamená

$$\exists x : (x \in M \wedge P(x) \wedge V(x)).$$

Poznámka 2 (Formule s více kvantifikátory). Nechť V je výroková forma se dvěma proměnnými. Pak $V(x, y)$ je tedy výroková forma o dvou proměnných, $\exists x : V(x, y)$ je výroková forma o jedné proměnné (y) a $\forall y \exists x : V(x, y)$ je výrok.

Poznámka 3 (Negování formulí s kvantifikátory). Nechť V je výroková forma s jednou proměnnou. Pak

$$\neg(\forall x : V(x)) = \exists x : \neg V(x),$$

$$\neg(\exists x : V(x)) = \forall x : \neg V(x).$$

Příklad. Určíme negaci výroku $\forall x \in M, P(x) : V(x)$. Je

$$\begin{aligned} \neg(\forall x \in M, P(x) : V(x)) &\iff \neg(\forall x \in M \wedge P(x) \implies V(x)) \\ &\iff \exists x : \neg(x \in M \wedge P(x) \implies V(x)) \\ &\iff \exists x : x \in M \wedge P(x) \wedge \neg V(x) \\ &\iff \exists x \in M, P(x) : \neg V(x). \end{aligned}$$

Poznámka 4 (Varování!). Záleží na pořadí kvantifikátorů. Uvažme Z množinu žen, D množinu dětí a $M(z, d)$ výrokovou formu žena z je maminkou dítěte d . Pak srovnej

$$\forall d \in D \exists z \in Z : M(z, d), \quad \exists z \in Z \forall d \in D : M(z, d).$$

1.2 Metody důkazů

- **přímý důkaz:** chceme $A \implies B$, k tomu dojdeme přes jednotlivé implikace $A \implies C_1 \implies \dots \implies C_n \implies B$
- **nepřímý důkaz:** chceme $A \implies B$, dokazujeme $\neg B \implies \neg A$
- **důkaz sporem:** chceme $A \implies B$, předpokládáme negaci a dojdeme ke sporu
- **důkaz rozбором případů:** chceme $(A \vee B) \implies C$, dokazujeme $A \implies C \wedge B \implies C$

- důkaz matematickou indukcí: Nechť V je výroková forma s jednou proměnnou. Chceme dokázat, že $\forall n \in \mathbb{N} : V(n)$. Stačí dokázat

1. $V(1)$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : (V(n) \implies V(n+1))$

1.3 Množiny

G. Cantor: „Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů, které nazýváme **prvky**, do jediného celku.“

Množinu definujeme výčtem prvků nebo pomocí vlastnosti, kterou musejí splňovat její prvky, tj. píšeme $\{x \in M; V(x)\}$, kde M je množina a V je výroková forma.

Pojmy *množina*, *prvek* a *býti prvkem* považujeme za primitivní pojmy.

Definice 7. Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B . Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme jej $A \subseteq B$. Množiny A a B jsou si rovny ($A = B$), jestliže mají stejné prvky. **Prázdnou množinou** nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem $\emptyset$.

Poznámka 5. $A \subseteq B$ připouští i $A = B$. Systémem množin rozumíme množinu množin.

Definice 8. **Sjednocením** množin A a B nazveme množinu tvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B . Značíme $A \cup B$.

Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a , pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

Definice 9. **Průnikem** množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B . Značíme $A \cap B$. Mají-li množiny A a B prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a , které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$.

Definice 10. **Rozdílem** množin A a B nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B . Značíme $A \setminus B$.

Definice 11. **Kartézským součinem** množin $A_1, \dots, A_n$ nazveme množinu všech uspořádaných n -tic

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{[a_1, \dots, a_n]; a_i \in A_i\}.$$

Věta 1 (de Morganova pravidla). Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin. Pak platí

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}.$$

Důkaz.

- $\subseteq$ Předpokládejme, že $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$. Potom platí $x \in X$ a $x \notin \bigcup \mathcal{A}$, tzn. $\forall A \in \mathcal{A} : x \notin A$. Odtud máme, že $\forall A \in \mathcal{A}$ je $x \in X \setminus A$. Potom dostáváme $x \in \bigcap \{X \setminus A, A \in \mathcal{A}\}$.
- $\supseteq$ Předpokládejme, že $x \in \bigcap \{X \setminus A, A \in \mathcal{A}\}$. Pro každé $A \in \mathcal{A}$ platí $x \in X \setminus A$. Odtud plyne $x \in X$ a pro každé $A \in \mathcal{A}$ máme $x \notin A$. Potom $x \notin \bigcup \mathcal{A}$. Dostáváme $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$. $\square$

1.4 Relace uspořádání a zobrazení

Definice 12. Binární relací rozumíme libovolnou množinu uspořádaných dvojic. Pokud R je binární relace a $[a, b] \in R$, pak říkáme, že prvek a je v relaci R s prvkem b . Často v tomto případě používáme zápis $a R b$.

Pokud binární relace R splňuje $R \subseteq A \times B$, pak říkáme, že R je **binární relací mezi prvky množin A a B** . Pokud $A = B$, pak říkáme, že R je **binární relací na A** .

Definice 13. Necht X je množina a R je relace na X . Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže pro každé $x \in X$ platí $[x, x] \in R$,
- **symetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \in R$,
- **tranzitivní**, jestliže pro každé $x, y, z \in X$ splňující $[x, y] \in R$ a $[y, z] \in R$ platí $[x, z] \in R$,
- **antisymetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \notin R$,
- **slabě antisymetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ a $[y, x] \in R$ platí $x = y$.

Definice 14. Necht R je relace na množině A . Řekneme, že R je na A

- **uspořádání** (někdy také částečné uspořádání či neostré uspořádání), jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní,
- **ostré uspořádání**, jestliže je antisymetrická a tranzitivní,
- **lineární uspořádání**, jestliže jde o uspořádání a pro každé $x, y \in A$ platí $[x, y] \in R$ nebo $[y, x] \in R$.

Příklad. Uvažujme množinu podmnožin $\mathbb{N}$ s relací $A \subseteq B$. To je uspořádání, ale není to lineární uspořádání.

Definice 15. Necht $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subseteq X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **maximálním** prvkem (**maximem**) množiny A , jestliže $x \in A$ a neexistuje $a \in A$ takové, že $x \leq a$ a $x \neq a$,
- **největším** prvkem množiny A , jestliže $x \in A$ a pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$.

Pojmy **minimální** prvek (**minimum**) množiny a **nejmenší** prvek množiny jsou definovány zřejmým způsobem.

Příklad. V množině $\{\{1\}, \{2\}, \emptyset\}$ uspořádané inkluzí jsou $\{1\}$ a $\{2\}$ maximální, ale množina nemá největší prvek.

Definice 16. Necht $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subseteq X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A ,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je dolní závorou množiny A ,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

Definice 17. Necht $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $M \subseteq X$. Řekneme, že prvek $G \in X$ je **supremem** množiny M a značíme $\sup M$, jestliže platí:

1. G je horní závorou množiny M ,
2. je-li prvek $G' \in X$ horní závorou množiny M , potom $G \leq G'$.

Řekneme, že prvek $g \in X$ je **infimem** množiny M a značíme $\inf M$, jestliže platí:

1. g je dolní závorou množiny M ,
2. je-li prvek $g' \in X$ dolní závorou množiny M , potom $g' \leq g$.

Příklad. Supremum množiny $(0, 1)$ je 1.

Poznámka 6. Supremum a infimum jsou určeny jednoznačně, pokud existují (plyne ze slabé antisymetrie).

Poznámka 7. Má-li množina největší prvek, je to supremum.

Důkaz. Ať L je největší prvek množiny M .

- (a) $L \in M, \forall x \in M : x \leq L \implies L$ je horní závora,
- (b) Je-li G' horní závora M , pak $L \leq G'$, protože $L \in M$, tedy L je supremum množiny M .

□

Věta 2. *Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X , $M \subseteq X$ je neprázdňá množina a existuje infimum a supremum množiny M . Potom platí $\inf M \leq \sup M$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $M \neq \emptyset$. Nalezneme $a \in M$. Potom platí $\inf M \leq a$ a $a \leq \sup M$. Díky tranzitivitě máme $\inf M \leq \sup M$. $\square$

Definice 18. Binární relaci F nazýváme **zobrazením**, pokud splňuje

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2 : ([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F) \implies y_1 = y_2.$$

Řekneme, že zobrazení F je **zobrazení z množiny A do množiny B** , jestliže platí $F \subseteq A \times B$.

Označení. Je-li x takové, že existuje $y : [x, y] \in F$, je y určené jednoznačně a značíme ho $F(x)$.

Definice 19. Nechť F je zobrazení.

- **Definičním oborem** zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{D}(F) = \{x; \exists y : [x, y] \in F\}.$$

Pro $x \in \mathcal{D}(F)$ označujeme jednoznačně určený prvek y splňující $[x, y] \in F$ symbolem $F(x)$.

- **Oborem hodnot** zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{H}(f) = \{y; \exists x : [x, y] \in F\}.$$

Označení. Nechť A a B jsou množiny a F je zobrazení.

(a) Pak symbol $F : A \rightarrow B$ znamená, že F je zobrazením z množiny A do množiny B a $\mathcal{D}(F) = A$. Takové zobrazení F nazýváme také **zobrazením množiny A do množiny B** .

(b) Pokud je $B = \mathbb{R}$, pak místo termínu zobrazení používáme termín **funkce**.

Poznámka 8. Graf F je $\{[x, F(x)], x \in \mathcal{D}(F)\}$.

Definice 20. Nechť A, B jsou množiny a f je zobrazení.

- **Obrazem množiny A** při zobrazení f rozumíme množinu

$$\{y \in \mathcal{H}(f); \exists x \in \mathcal{D}(f) \cap A : f(x) = y\},$$

kterou značíme $f(A)$.

- **Vzorem množiny** B při zobrazení f rozumíme množinu

$$\{x \in \mathcal{D}(f); f(x) \in B\},$$

kterou značíme $f^{-1}(B)$.

Definice 21. Řekneme, že zobrazení f

- je **prosté**, jestliže platí

$$\forall x, y \in \mathcal{D}(f) : f(x) = f(y) \implies x = y,$$

- je **na množinu** B , jestliže platí $\mathcal{H}(f) = B$,
- je **bijekcí množiny** A **na množinu** B , jestliže $\mathcal{D}(f) = A$ a jde o prosté zobrazení na B .

Definice 22. Necht f je zobrazení a C je množina. Pak zobrazení definované předpisem $x \mapsto f(x)$, $x \in C \cap \mathcal{D}(f)$, nazýváme **restrikcí** nebo **zúžením** zobrazení f na množinu C a značíme jej $f|_C$.

Definice 23. Necht f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením** (**složením zobrazení**) f a g , přičemž g nazýváme **vnějším** zobrazením a f nazýváme **vnitřním** zobrazením.

Definice 24. Necht $f : A \rightarrow B$ je prosté zobrazení. Pak zobrazení $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ definované pro $y \in f(A)$ předpisem $f^{-1}(y) = x$, kde $x \in A$ je jednoznačně určeno vztahem $y = f(x)$, nazýváme **inverzním zobrazením** k zobrazení f .

Definice 25. Necht A je neprázdná množina.

- Konečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, do množiny A . Pokud $k \mapsto a_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme $\{a_k\}_{k=1}^n$. Prvek a_k nazýváme k -tým **členem** této posloupnosti.
- Nekonečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny A . Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, případně jen $\{a_n\}$. Prvek a_n nazýváme n -tým **členem** této posloupnosti.

Poznámka 9. Posloupnost můžeme zadat

- explicitně: $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$,
- rekurentně: $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + 4$.

1.5 Konečné a spočetné množiny

Definice 26.

- (a) Řekneme, že množina A **má stejnou mohutnost** jako množina B , jestliže existuje bijekce A na B . Značíme $A \approx B$.
- (b) Řekneme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou** mohutnosti množiny B , jestliže existuje prosté zobrazení A do B . Značíme $A \preceq B$.
- (c) Řekneme, že množina A **má menší mohutnost** než množina B , jestliže existuje prosté zobrazení A do B a přitom A nemá stejnou mohutnost jako B . Značíme $A \prec B$. Říkáme taky, že A je **subvalentní** B .

Příklad. Ať $A = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \mathbb{N}$. Pak z $t : n^2 \mapsto n^2$ a $f : n^2 \mapsto n$ plyne $A \approx B$.

Definice 27. Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako $\{1, \dots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, pokud není konečná. Řekneme, že množina X je **spočetná**, jestliže je konečná, nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$. Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Poznámka 10. Pro počet prvků konečné množiny X používáme často značení $|X|$. Dvě konečné množiny X, Y mají stejnou mohutnost právě tehdy, když $|X| = |Y|$.

Věta 3 (Cantor-Bernstein). *Nechť A, B jsou množiny takové, že $A \preceq B$ a zároveň $B \preceq A$. Pak A a B mají stejnou mohutnost.*

Věta 4 (Cantor). *Nechť X je množina. Pak $X \prec \mathcal{P}(X)$, kde $\mathcal{P}(X)$ je množina všech podmnožin množiny X .*

Příklad. $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Věta 5 (Vlastnosti spočetných množin).

- (a) Podmnožina spočetné množiny je spočetná.
- (b) Nechť zobrazení $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ je prosté. Potom je množina A spočetná.
- (c) Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.
- (d) Obraz spočetné množiny je spočetná množina.
- (e) Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.

1.6 Číselné obory

Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) a **násobení** ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností:

- I. vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah,

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),
- $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
- $\exists w \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : w + x = x$ (prvek w je určen jednoznačně, značíme ho 0 a říkáme mu nulový prvek),
- $\forall x \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} : x + z = 0$ (z je tzv. opačné číslo k číslu x , je určeno jednoznačně a značíme ho $-x$),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociativita násobení),
- $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita násobení),
- $\exists v \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall x \in \mathbb{R} : v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme ho 1 a říkáme mu jednotkový prvek),
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$ (prvek y je určen jednoznačně a značíme ho x^{-1}),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (distributivita).

II. vztah uspořádání a operací sčítání a násobení,

- $\leq$ je lineární uspořádání,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \implies x + z \leq y + z$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R} : (0 \leq x \wedge 0 \leq y) \implies 0 \leq x \cdot y$.

III. vlastnost suprema: Každá neprázdňá shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

Věta 6. Necht $M \subseteq \mathbb{R}$ je neprázdňá zdola omezená množina. Pak existuje infimum množiny M .

Důkaz. Předpokládejme, že $M \subseteq \mathbb{R}$ je neprázdňá zdola omezená množina. Definujeme

$$-M = \{-m, m \in M\}.$$

Množina $-M$ je neprázdňá, protože M je neprázdňá.

$-M$ je omezená shora. M je omezená zdola, takže nalezneme $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall x \in M : K \leq x$. Odtud plyne $\forall x \in M : -x \leq -K$. Prvek $-K$ je tedy horní závorou množiny $-M$, odkud máme, že $-M$ je shora omezená.

Podle vlastnosti suprema existuje $\sup(-M)$. Položme $g = -\sup(-M)$.

(a) $\sup(-M)$ je horní závorou $-M$, takže $g = -\sup(-M)$ je dolní závorou množiny M .

(b) Předpokládejme, že g' je dolní závorou množiny M . Potom $-g'$ je horní závorou množiny $-M$. Platí, že $\sup(-M) \leq -g'$. Odtud $g' \leq -\sup(-M) = g$. $\square$

Věta 7. Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.

Důkaz. Dokazujeme sporem. Pak $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq x$, takže x je horní závorou množiny $\mathbb{N}$, a tedy $\mathbb{N}$ je shora omezená. Množina $\mathbb{N}$ je neprázdná, a proto podle vlastnosti suprema existuje supremum $\mathbb{N}$, které označíme jako G . Potom platí

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \leq G.$$

Odtud plyne $\forall n \in \mathbb{N} : n + 1 \leq G$, neboli $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq G - 1$. Číslo $G - 1$ je horní závorou množiny $\mathbb{N}$ a platí $G - 1 < G$, což je spor s definicí suprema. $\square$

Věta 8. Pro každé $r \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno číslo $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq r < k + 1$.

Důkaz. Postupně dokážeme existenci a jednoznačnost.

Existence. Položme $M = \{n \in \mathbb{Z}, r < n\}$. Množina M je zdola omezená, neboť r je její dolní závorou. Podle věty 7 platí $M \neq \emptyset$. Podle věty 6 existuje infimum množiny M , které označíme g . Nalezneme $k' \in M$ takové, že $k' < g + 1$. Položme $k = k' - 1$. Platí $k \in \mathbb{Z}$, neboť $k' \in M \subseteq \mathbb{Z}$. Poněvadž $k' \in M$, máme $r < k' = k + 1$. Platí $k' - 1 < g$, a tedy $k' - 1 \notin M$. Máme tedy $k = k' - 1 \leq r$.

Jednoznačnost. Předpokládejme pro spor, že existují $k, j \in \mathbb{Z}, k \neq j$ taková, že $k \leq r < k + 1$ a $j \leq r < j + 1$. BÚNO $j < k$. Potom $0 < k - j < 1$, $k - j \in \mathbb{Z}$, což je spor. $\square$

Označení. Celou část čísla r značíme $[r]$.

Věta 9. Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Pak existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $a < q < b$.

Důkaz. Podle věty 7 nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n > \frac{1}{b - a}. \quad (1)$$

Položíme $q = \frac{[na] + 1}{n}$. Potom $q \in \mathbb{Q}$ a

$$a = \frac{na}{n} < \frac{[na] + 1}{n} \leq \frac{na + 1}{n}.$$

Podle rovnice 1 máme $nb - na > 1 \iff nb > 1 + na$, a tedy $\frac{na+1}{n} < \frac{nb}{n} = b$. $\square$

Definice 28. Množinu komplexních čísel $\mathbb{C}$ definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic (a, b) , kde $a, b \in \mathbb{R}$, přičemž pro komplexní čísla $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ definujeme operace **sčítání** a **násobení** následovně:

- $x + y = (a + c, b + d)$,
- $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$.

Nechť $x = (a, b) \in \mathbb{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x , prvek b nazýváme **imaginární částí** x . **Absolutní hodnotou** komplexního čísla x rozumíme $\sqrt{a^2 + b^2}$. Dále definujeme $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$ a $i = (0, 1)$. **Komplexně sdruženým číslem** k x rozumíme číslo $\bar{x} = (a, -b)$, symbol $-x$ značí číslo $(-a, -b)$ a symbol $1/x$ značí pro $x \neq 0$ (jednoznačně určené) číslo splňující $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

Kapitola 2

Limita posloupnosti

2.1 Úvod

Definice 29. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice 30. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí či klesající.

2.2 Vlastní limita posloupnosti

Definice 31. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou A** , jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Věta 10 (Jednoznačnost limity). Necht $\{a_n\}$ je posloupnost, která má limitu rovnou $A \in \mathbb{R}$ a zároveň má limitu rovnou $B \in \mathbb{R}$. Potom platí $A = B$.

Limita posloupnosti

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K tomuto ε nalezneme nějaké n_0 takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Dále nalezneme $n'_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n'_0 : |a_n - B| < \varepsilon.$$

Nalezneme $m \in \mathbb{N}$, které splňuje $m \geq n_0$ a $m \geq n'_0$. Potom platí

$$0 \leq |A - B| = |A - a_m + a_m - B| \leq |A - a_m| + |a_m - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Odtud plyne, že $|A - B| = 0$, neboli $A = B$. □

Označení. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu $A \in \mathbb{R}$, potom ji značíme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ nebo jen $\lim a_n$.

Definice 32. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **konverguje** (je **konvergentní**), jestliže existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$, neboli platí

$$\exists A \in \mathbb{R} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Je-li posloupnost konvergentní, říkáme též, že má **vlastní limitu**. Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu, pak říkáme, že **diverguje** (je **divergentní**).

Lemma 1. *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když existuje $K \in \mathbb{R}, K > 0$, takové, že platí*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < K\varepsilon.$$

Důkaz.

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Položme $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{K}$. Podle předpokladu nalezneme pro $\tilde{\varepsilon}$ číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 : |a_n - A| < K\tilde{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Odtud plyne $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

$\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Položme $\tilde{\varepsilon} = K\varepsilon$. Podle předpokladu nalezneme číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 : |a_n - A| < \tilde{\varepsilon} = K\varepsilon.$$

□

Příklad.

Limita posloupnosti

1. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a existuje $n^* \in \mathbb{N}$ a $c \in \mathbb{R}$ taková, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n^* : a_n = c$.
Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Položme $n_0 = n^*$. Potom $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ máme $|a_n - c| = |c - c| < \varepsilon$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ podle věty 7. Potom

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Sporem. Předpokládejme, že

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - 1| = |\sqrt[n]{n} - 1| \geq \varepsilon. \quad (2)$$

Zafixujeme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ takové, že platí (2). Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že

$$\forall k \in \mathbb{N} : |\sqrt[n_k]{n_k} - 1| \geq \varepsilon.$$

Konstrukce $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$.

- $k = 1$: Položme $n_0 = 1$ a použijme (2). Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ splňující $|\sqrt[n_1]{n_1} - 1| \geq \varepsilon$.
- $k \rightsquigarrow k + 1$: Již máme $n_1 < n_2 < \dots < n_k$. Položme $n_0 = n_k + 1$ a použijeme (2). Nalezneme $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ splňující $n_{k+1} \geq n_0 > n_k$ a $|\sqrt[n_{k+1}]{n_{k+1}} - 1| \geq \varepsilon$. Pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ platí

$$\begin{aligned} |\sqrt[n_k]{n_k} - 1| &\geq \varepsilon \\ \sqrt[n_k]{n_k} - 1 &\geq \varepsilon \\ n_k &\geq (1 + \varepsilon)^{n_k} \geq 1 + \binom{n_k}{1} \varepsilon + \binom{n_k}{2} \varepsilon^2 \\ n_k &\geq \binom{n_k}{2} \varepsilon^2 = \frac{1}{2} n_k (n_k - 1) \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ platí

$$\begin{aligned} \frac{2}{\varepsilon^2} &\geq n_k - 1 \\ \frac{2}{\varepsilon^2} + 1 &\geq n_k \geq k \implies \mathbb{N} \text{ je shora omezená,} \end{aligned}$$

což je spor.

4. Posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ není konvergentní.

Limita posloupnosti

Sporem. Předpokládejme, že existuje $A \in \mathbb{R}$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = A$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |(-1)^n - A| < \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Odtud plyne $A \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a zároveň $A \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, což je spor.

Věta 11. *Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$. Potom $\lim |a_n| = |A|$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon.$$

Důkaz nerovnosti $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} |x| &= |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \\ |x| - |y| &\leq |x - y|. \end{aligned}$$

□

Věta 12. *Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost. Potom je $\{a_n\}$ omezená.*

Důkaz. Hodnot před n_0 je konečně mnoho. Označme $A = \lim a_n$. Zvolme $\varepsilon = 1$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon = 1.$$

Množina $\{a_1, \dots, a_{n_0}\}$ je konečná, a proto $\exists c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq n_0 : |a_n| \leq c.$$

Dále platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n| = |a_n + A - A| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|.$$

Položme $K = \max\{c, 1 + |A|\}$. Potom platí

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K,$$

odkud máme, že $\{a_n\}$ je omezená.

□

Definice 33. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazýváme **vybranou posloupností** z posloupnosti $\{a_n\}$, případně **podposloupností** posloupnosti $\{a_n\}$.

Příklad. Ať $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Pak posloupnost $n_a = k^2, k \in \mathbb{N}$ je vybraná posloupnost: $\left\{\frac{1}{k^2}\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Věta 13. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $n' \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geq n', n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon. \quad (3)$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq n'$ platí $n_k \geq k \geq n'$. Potom $|a_{n_k} - A| < \varepsilon$ podle (3). $\square$

Poznámka 11. Větu 13 lze užít k důkazu, že jistá posloupnost $\{a_n\}$ nemá limitu. Stačí nalézt dvě podposloupnosti z $\{a_n\}$ s rozdílnými limitami.

Věta 14 (Aritmetika limit). Necht $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$. Potom platí:

$$(a) \lim(a_n + b_n) = A + B,$$

$$(b) \lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B,$$

$$(c) \text{ je-li } B \neq 0 \text{ a pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ platí } b_n \neq 0, \text{ pak}$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

Důkaz.

(a) Zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $n_A, n_B \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_A : |a_n - A| < \varepsilon, \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_B : |b_n - B| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (4)$$

Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Odtud dle lemmatu 1 plyne $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$.

(b) Posloupnost $\{b_n\}$ je konvergentní, a tedy omezená podle věty 12. Nalezneme $K \in \mathbb{R}, K > 0$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : |b_n| \leq K.$$

Limita posloupnosti

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $n_A, n_B \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_A : |a_n - A| < \varepsilon,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_B : |b_n - B| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max \{n_A, n_B\}$. Vezměme $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Počítejme

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \\ &\leq |(a_n - A)b_n| + |A(b_n - B)| = |a_n - A| \cdot |b_n| + |A| \cdot |b_n - B| \\ &< \varepsilon K + |A| \cdot \varepsilon = \varepsilon(K + |A|), \end{aligned}$$

odkud máme podle lemmatu 1 $\lim a_n b_n = AB$.

(c) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| &= \left| \frac{a_n B - AB + AB - Ab_n}{b_n B} \right| \\ &< \frac{|a_n B - AB| + |AB - Ab_n|}{|b_n B|} = \frac{|a_n - A| \cdot |B| + |A| \cdot |B - b_n|}{|b_n B|} \\ &= \frac{1}{|b_n|} \cdot |a_n - A| + \frac{|A|}{|b_n| \cdot |B|} \cdot |b_n - B|. \end{aligned} \quad (5)$$

Poněvadž $\lim b_n = B$ a $|B| > 0$, lze nalézt $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n^* : |b_n - B| < \frac{1}{2}|B|.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n^*$ platí $|b_n| > \frac{1}{2}|B|$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $m^* \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq m^* : |a_n - A| < \varepsilon \wedge |b_n - B| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max \{m^*, n^*\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ podle (5) platí

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| &\leq \frac{1}{|b_n|} \cdot |a_n - A| + \frac{|A|}{|b_n| \cdot |B|} \cdot |b_n - B| \\ &< \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot |B|} \cdot \varepsilon + \frac{|A|}{\frac{1}{2} \cdot |B| \cdot |B|} \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

odkud podle lemmatu 1 dostáváme $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$. □

Příklad.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, neboť $\lim \frac{1}{n} = 0$ a $\lim \frac{1}{n^2} = \left(\lim \frac{1}{n} \right)^2$.

(2) Nechť $k \in \mathbb{N}$. Potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

(3) $\lim \frac{n-1}{n} = \lim \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1 + (-1) \cdot 0 = 1$.

Poznámka 12 (Varování!). Vztah $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ obecní neplatí! Položme $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$, $\{b_n\} = \{(-1)^{n+1}\}$. Potom platí

$$\lim(a_n + b_n) = \lim 0 = 0,$$

ale $\lim a_n$ ani $\lim b_n$ neexistují.

Poznámka 13. Pokud změním konečně mnoho členů posloupnosti, nebude to mít žádný vliv na existenci či neexistenci limity ani na její případnou hodnotu. Odtud plyne, že můžeme počítat limity „posloupností“, které jsou definovány na $\mathbb{N}$ vyjma konečné množiny.

Věta 15. *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Pak $\lim a_n b_n = 0$.*

Důkaz. Nalezneme $K \in \mathbb{R}, K > 0$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : |b_n| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon K,$$

odkud podle lemmatu 1 máme $\lim a_n b_n = 0$. □

Příklad. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sin n = 0$.

Věta 16 (Limita a uspořádání). *Nechť $A, B \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti splňující $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.*

- (a) *Nechť $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$.*
- (b) *Nechť existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n^*$, platí $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.*

Důkaz.

(a) Položme $\varepsilon = \frac{1}{4}(B - A)$. Nalezneme $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Podobně

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 : |b_n - B| < \varepsilon.$$

Limita posloupnosti

Položme $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$. Pak $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $a_n < A + \varepsilon$ a $A + \varepsilon < B - \varepsilon < b_n$.

- (b) Sporem. Předpokládejme, že $A < B$. Podle (a) nalezneme n_0 takové, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$. Zvolme $n_1 = \max \{n_0, n^*\}$. Potom platí $a_{n_1} < b_{n_1} \leq a_{n_1}$ z předpokladu, což je spor. $\square$

Poznámka 14. V bodě A nelze uvažovat neostrou nerovnost místo ostré. Pak

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad b_n = 0 \qquad \lim a_n = 0 = \lim b_n.$$

Podobně v (b).

Věta 17 (O dvou strážnících). Necht $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

(a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$,

(b) $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou konvergentní a platí $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom je $\{c_n\}$ konvergentní a platí $\lim c_n = \lim a_n$.

Důkaz. Označme $\lim a_n = \lim b_n = A$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : |a_n - A| < \varepsilon,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : |b_n - A| < \varepsilon.$$

Položme $n_2 = \max \{n_0, n_1\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_2$ platí

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon,$$

tedy také $|c_n - A| < \varepsilon$. $\square$

Příklad. Necht $c \in \mathbb{R}, c > 0$. Potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

- (1) $c \geq 1$: Platí $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{c} \geq 1$. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{c}.$$

Podle věty o dvou strážnících 17, vezmeme-li $a_n = 1, b_n = \sqrt[n]{n}, c_n = \sqrt[n]{c}$, dostaneme $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

- (2) $0 < c < 1$: Je $\lim \sqrt[n]{c} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}}, \frac{1}{c} > 1$. Zbytek dostaneme z (a).

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice 34. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou ∞ (čteme plus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > K.$$

Limita posloupnosti

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** $-\infty$ (čteme mínus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n < K.$$

Má-li posloupnost limitu rovnou plus nebo mínus nekonečno, říkáme, že **má nevlastní limitu**. Jestliže má posloupnost limitu rovnou ∞ , pak říkáme, že **diverguje** k ∞ . Jestliže má posloupnost limitu rovnou $-\infty$, pak říkáme, že **diverguje** k $-\infty$.

Příklad. Ukážeme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Podle věty 7 nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > K$. Potom $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $n \geq n_0 > K$. Odtud plyne $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$.

Označení. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Věta 18 (Jednoznačnost limit podruhé). *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, která má limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$ a zároveň má limitu rovnou $B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí $A = B$.*

Důkaz. Sporem. Předpokládejme, že $A \neq B$. BÚNO $A < B$. Rozlišíme následující případy:

- (1) $A = -\infty, B \in \mathbb{R}$,
- (2) $A = -\infty, B = \infty$,
- (3) $A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$,
- (4) $A \in \mathbb{R}, B = \infty$.

Ukážeme případ (1), v ostatních se postupuje analogicky. Zvolme $\varepsilon = 1$. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : |a_n - B| < \varepsilon = 1.$$

Zvolme $K = B - 1$. Nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$, takové že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 : a_n < K = B - 1.$$

Položme $m = \max\{n_1, n_2\}$. Pak platí $a_m < B - 1 < a_m$, což je spor. □

Poznámka 15. Označení. Symbol $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ bude značit vlastní nebo nevlastní limitu posloupnosti $\{a_n\}$, pokud existuje. Někdy budeme používat jen symbol $\lim a_n$. Někdy také píšeme $a_n \rightarrow A, n \rightarrow \infty$.

Poznámka 16.

$$\lim a_n \begin{cases} \text{existuje} & \begin{cases} \text{je vlastní, tj. } \lim a_n \in \mathbb{R} \\ \text{je nevlastní, tj. } \lim a_n = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases} \end{cases} \\ \text{neexistuje} \end{cases}$$

Pokud má vlastní limitu, říkáme, že konverguje. V ostatních případech diverguje.

Poznámka 17 (Rozšířená reální osa $\mathbb{R}^*$).

- uspořádání na $\mathbb{R}^*$

$$-\infty < \infty, \quad \forall a \in \mathbb{R} : -\infty < a, \quad \forall a \in \mathbb{R} : a < \infty,$$

tedy $\leq$ na $\mathbb{R}^*$ je lineární

- sčítání na $\mathbb{R}^*$

$$-(\infty) = -\infty, \quad -(-\infty) = \infty, \quad \forall a \in \mathbb{R} : a + \infty = \infty + a = \infty,$$

obdobně pro

$$\forall a \in \mathbb{R} : a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty.$$

Výraz $\infty - \infty$ není definován.

- násobení na $\mathbb{R}^*$

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, a > 0 : a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty,$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, a < 0 : a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty,$$

$$\infty^{-1} = 0, \quad (-\infty)^{-1} = 0.$$

Věta 19 (Aritmetika limit podruhé). *Necht' $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:*

(a) $\lim(a_n + b_n) = A + B$, pokud je výraz na pravé straně definován,

(b) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, pokud je výraz na pravé straně definován,

(c) je-li $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Dokážeme případ (a), ostatní analogicky. Pokud $A, B \in \mathbb{R}$, pak znění plyne z věty 14. Díky komutativitě stačí dokázat tvrzení v následujících případech:

(i) $A = B = \infty$,

(ii) $A = \infty, B \in \mathbb{R}$,

(iii) $A \in \mathbb{R}, B = -\infty$,

(iv) $A = B = -\infty$.

Provedeme pouze důkaz případu (ii). Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Nalezneme $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : |b_n - B| < 1,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 : a_n > K - B + 1.$$

Limita posloupnosti

Položme $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$a_n + b_n > (K - B + 1) + (B - 1) = K.$$

□

Poznámka 18. U zkoušky budou vyžadovány i zbývající části tohoto důkazu.

Příklad.

(1) $\lim n^2 = \lim(n \cdot n) = \infty \cdot \infty = \infty$,

(2) Nechť $a_n = n + \alpha$, $b_n = -n$. Pak $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = -\infty$, $\lim(a_n + b_n) = \alpha$, neboť je to konstantní posloupnost, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Poznámka 19. Platí následující. Nechť $\{a_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující

(a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $a_n \leq c_n$,

(b) $\lim a_n = \infty$.

Potom $\lim c_n = \infty$.

Věta 20. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

- pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$,
- $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $A > 0$,
- $\lim b_n = 0$,
- existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $b_n > 0$.

Potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Důkaz. Rozlišíme dvě možnosti:

(1) $A \in \mathbb{R}, A > 0$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}A$. Potom $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : |a_n - A| < \varepsilon = \frac{1}{2}A,$$

tj. $a_n \in \left(\frac{1}{2}A, \frac{3}{2}A\right)$. Položme $L = \max \{K, 1\}$. Nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 : |b_n - 0| < \frac{\frac{1}{2}A}{L},$$

tj. $b_n \in \left(-\frac{A}{2L}, \frac{A}{2L}\right)$. Položme $n^* = \max \{n_0, n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n^*$ platí

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{\frac{1}{2}A}{\frac{A}{2L}} > \frac{\frac{1}{2}A}{\frac{A}{2L}} = L \geq K.$$

(2) $A = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : a_n > 1.$$

Položme $L = \max \{K, 1\}$. Nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 : |b_n - 0| < \frac{1}{L}.$$

Položme $n^* = \max \{n_0, n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n^*$ platí

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{1}{b_n} > \frac{1}{\frac{1}{L}} = L \geq K,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka 20 (Supremum a infimum v $\mathbb{R}^*$). Musíme rozlišovat $(\mathbb{R}, \leq)$ a $(\mathbb{R}^*, \leq)$. V $\mathbb{R}^*$ platí $\sup \emptyset = -\infty$ a podobně $\inf \emptyset = \infty$. Je-li $M \subset \mathbb{R}$ a M není shora omezená, je $\sup M = \infty$ a podobně je-li $M \subset \mathbb{R}$ a M není zdola omezená, je $\inf M = -\infty$.

2.4 Hlubší věty o limitách

Věta 21. *Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost. Potom existuje $\lim a_n$. Je-li $\{a_n\}$ neklesající, pak $\lim a_n = \sup \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí, pak $\lim a_n = \inf \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$.*

Důkaz. Položme $A = \sup \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ a předpokládejme, že $\{a_n\}$ je neklesající. Rozlišíme následující možnosti:

- (i) $\{a_n\}$ není shora omezená. Potom $A = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > K$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$a_n \geq a_{n_0} > K.$$

- (ii) $\{a_n\}$ je shora omezená. Potom $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Číslo $A - \varepsilon$, které je menší než A , není horní závorou množiny $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > A - \varepsilon$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$A - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq A < A + \varepsilon.$$

Odtud plyne $\lim a_n = A$.

Pokud je $\{a_n\}$ nerostoucí, lze postupovat analogicky, ale supremum je nahrazeno infimem. Je možné také přejít k posloupnosti $\{-a_n\}$. □

Poznámka 21. Z důkazu předchozí věty plyne, že pro monotónní posloupnost $\{a_n\}$ platí:

$$\{a_n\} \text{ je } \begin{cases} \text{neklesající} & \begin{cases} \text{je shora omezená,} & \text{pak } \lim a_n \in \mathbb{R} \\ \text{není shora omezená,} & \text{pak } \lim a_n = \infty \end{cases} \\ \text{nerostoucí} & \begin{cases} \text{je zdola omezená,} & \text{pak } \lim a_n \in \mathbb{R} \\ \text{není zdola omezená,} & \text{pak } \lim a_n = -\infty \end{cases} \end{cases}$$

Příklad. Necht $q \in (0, 1)$. Potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $q^n \geq q^{n+1} \geq 0$. Podle věty 21 existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = A$. Podle věty 16 platí $A \geq 0$.

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} q \cdot q^n = q \cdot A,$$

odtud plyne $A = 0$. Použili jsme větu 13. Pro úplnost uvedme ještě toto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{pro } q > 1, \\ 1 & \text{pro } q = 1, \\ 0 & \text{pro } q \in (-1, 1), \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1. \end{cases}$$

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = \infty$ dle věty 20

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$

(c) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$, což konverguje k nule, takže i $-|q|^n$ konverguje k nule, a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (q^2)^n = \begin{cases} 1 & q = -1, \\ \infty & q < -1. \end{cases}$ Podobně $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} q \cdot q^{2n}$

$$(q^2)^n = \begin{cases} -1 & q = -1, \\ -\infty & q < -1 \end{cases}$$

Věta 13 dává tvrzení.

Poznámka 22 (Varování). V předchozím výpočtu je krok ověření existence limity podstatný. Mějme posloupnost $a_1 = -1, a_{n+1} = -a_n$. Pak

$$\begin{aligned} \lim a_{n+1} &= \lim(-a_n) = -A \\ &= \lim a_n = A \\ &\implies \lim a_n = 0, \end{aligned}$$

ale tato limita neexistuje! Tento výpočet je špatně.

Věta 22 (Bolzano–Weierstrass). Necht $\{a_n\}$ je omezená posloupnost. Potom existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která je konvergentní.

Limita posloupnosti

Důkaz. Nalezneme posloupnosti $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$ splňující:

- (a) pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_k \leq \beta_k$,
- (b) pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] = \left[\alpha_k, \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)\right]$ nebo $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] = \left[\frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k), \beta_k\right]$,
- (c) pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí, že množina $\{j \in \mathbb{N}, a_j \in [\alpha_k, \beta_k]\}$ je nekonečná.

Konstrukce $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, takže nalezneme $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_1 \leq a_n \leq \beta_1.$$

Postupujeme indukcí. Předpokládejme, že již máme α_k, β_k . Množina

$$S = \{j \in \mathbb{N}, a_j \in [\alpha_k, \beta_k]\}$$

je nekonečná. Dále definujeme

$$L = \left\{j \in \mathbb{N}, a_j \in \left[\alpha_k, \frac{1}{2}(\alpha_k, \beta_k)\right]\right\},$$

$$P = \left\{j \in \mathbb{N}, a_j \in \left[\frac{1}{2}(\alpha_k, \beta_k), \beta_k\right]\right\}.$$

Platí S je nekonečná a $S = L \cup P$. Potom L nebo P je nekonečná. Pokud je L nekonečná, klademe $\alpha_{k+1} = \alpha_k$, $\beta_{k+1} = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)$. Pokud je L konečná, potom je P nekonečná a klademe $\alpha_{k+1} = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)$, $\beta_{k+1} = \beta_k$.

Limita pomocných posloupností. Z konstrukce plyne, že $\{a_k\}$ je neklesající a podobně $\{\beta_k\}$ je nerostoucí. Dále platí, že

$$\forall k \in \mathbb{N} : \alpha_1 \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq \beta_1.$$

Máme dvě monotónní posloupnosti, které jsou omezené, takže mají podle věty 21 limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_k = \alpha \in [\alpha_1, \beta_1],$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_k = \beta \in [\alpha_1, \beta_1].$$

Platí

$$\beta - \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_k - \alpha_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_1 - \alpha_1) \cdot 2^{-k+1} = 0$$

Odtud plyne $\alpha = \beta$.

Konstrukce vybrané posloupnosti. Položme $n_1 = 1$. Konstrukce indukcí. Předpokládejme, že již máme přirozená čísla $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ a pro každé $j \in \mathbb{N}, j \leq k$ platí $a_{n_j} \in [\alpha_j, \beta_j]$. Budeme hledat n_{k+1} . Množina $\{i \in \mathbb{N}, a_i \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]\}$ je nekonečná podle (c). Potom i množina

$$\{i \in \mathbb{N}, i > n_0 \wedge a_i \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]\}$$

Limita posloupnosti

je nekonečná. Máme tedy nalézt $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k+1} > n_k$ a $a_{n_{k+1}} \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k,$$

ale α_k i β_k konvergují k α , takže podle věty o dvou strážnících platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = \alpha \in \mathbb{R},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Definice 35. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{a_k, k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ shora omezená,} \\ \infty, & \text{jestliže není } \{a_n\} \text{ shora omezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{a_k, k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{jestliže není } \{a_n\} \text{ zdola omezená.} \end{cases}$$

Poznámka 23.

- (i) Definice 35 je korektní díky větě o limitě monotónní posloupnosti 21.
- (ii) Místo $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ někdy píšeme $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$ a místo $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ $\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$.

Příklad.

- (i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1$.
- (ii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty$.

Věta 23 (Limita, limes superior a limes inferior). Necht $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.

Důkaz.

$\Rightarrow$ • $A \in \mathbb{R}$: Podle věty 12 je $\{a_n\}$ omezená. Označme $b_n = \sup \{a_k, k \geq n\}$, $c_n = \inf \{a_k, k \geq n\}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Potom platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

Limita posloupnosti

Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$A - \varepsilon \leq c_n \leq b_n \leq A + \varepsilon.$$

Podle věty 16 plyne, že

$$A - \varepsilon \leq \underbrace{\lim c_n}_{\liminf a_n} \leq \underbrace{\lim b_n}_{\limsup a_n} \leq A + \varepsilon,$$

odkud plyne $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

- $A = \infty$: $\{a_n\}$ není omezená shora, ale je omezená zdola. Dostáváme $\limsup a_n = \infty$ přímo z definice. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > K + 1.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$c_n \geq K + 1 > K.$$

Je tedy $\liminf a_n = \lim c_n = \infty$.

- $A = -\infty$: Provedte samostatně.
- $\Leftarrow$ • $A \in \mathbb{R}$: $\limsup a_n = \liminf a_n = A$. Zde máme, že $\{a_n\}$ je omezená posloupnost. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n, c_n \in \mathbb{R}$ a

$$c_n \leq a_n \leq b_n.$$

Protože c_n konverguje k $\liminf a_n = A$ a b_n k $\limsup a_n = A$, je podle věty o dvou strážnících 17 $\lim a_n = A$.

- $A = \infty$: $\{a_n\}$ není shora omezená, ale je zdola omezená. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \in \mathbb{R}$ a platí $c_n \leq a_n$. Protože c_n konverguje k $\liminf a_n = \infty$, je podle věty o dvou strážnících 17 i $\lim a_n = \infty$.
- $A = -\infty$: Samostatně. □

Věta 24. *Nechť $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti. Předpokládejme, že platí*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : x_n \leq y_n.$$

Potom $\limsup x_n \leq \limsup y_n$ a $\liminf x_n \leq \liminf y_n$.

Důkaz. Dokážeme jen druhou nerovnost, první se provede obdobně. Pokud $\{x_n\}$ není zdola omezená, potom $\liminf x_n = -\infty$ a dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $\{x_n\}$ je zdola omezená. Potom je zdola omezená i posloupnost $\{y_n\}$. Potom pro

každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$\inf \{x_k, k \geq n\} \leq \inf \{y_k, k \geq n\}.$$

Protože levá strana konverguje k $\liminf x_n$ a pravá k $\liminf y_n$, musí platit i $\liminf x_n \leq \liminf y_n$. $\square$

Definice 36. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ z posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti a_n značíme $H(\{a_n\})$.

Příklad.

(i) $H(\{(-1)^n\}) = \{-1, 1\}$

(ii) $H(\{\sin n\}) = [-1, 1]$

Věta 25 (Limes superior, limes inferior a hromadné hodnoty). Necht $\{a_n\}$ je posloupnost. Potom $\limsup a_n, \liminf a_n \in H(\{a_n\})$ a pro každé $y \in H(\{a_n\})$ platí $\liminf a_n \leq y \leq \limsup a_n$.

Důkaz. Označme $A = \limsup a_n$. Rozlišíme následující případy:

- (i) $A \in \mathbb{R}$: Označme $b_n = \sup \{a_k, k \geq n\}$. Potom platí $b_n \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\{b_n\}$ je nerostoucí posloupnost splňující $\lim b_n = A$. Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ a rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ takové, že $m_k \leq n_k$ a

$$|b_{m_k} - a_{n_k}| < \frac{2}{k}. \quad (6)$$

- $k = 1$: Položme $m_1 = 1$. Podle definice je $b_{m_1} = \sup \{a_k, k \geq m_1\}$. Nalezneme $n_1 \geq m_1$ splňující $b_{m_1} \geq a_{n_1} > b_{m_1} - \frac{2}{k}$.
- Indukční krok z k na $k + 1$: Máme

$$\begin{aligned} n_1 &< n_2 < n_3 < \dots < n_k, \\ m_1 &< m_2 < m_3 < \dots < m_k. \end{aligned}$$

Nalezneme $m_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $m_{k+1} > n_k$:

$$b_{m_{k+1}} = \sup \{a_j, j \geq m_{k+1}\}.$$

Nalezneme n_{k+1} takové, že

$$b_{m_{k+1}} \geq a_{n_{k+1}} > b_{m_{k+1}} - \frac{2}{k+1}.$$

Pak podle (6) je

$$|b_{m_{k+1}} - a_{m_{k+1}}| < \frac{2}{k+1}.$$

Platí $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{m_k} = A = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(b_{m_k} - \frac{2}{k+1}\right)$, takže $\lim a_{n_k} = A$.

(ii) $A = \infty$: $\{a_n\}$ není shora omezená.

- $k = 1$: Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} > 1$.
- Indukční krok z k na $k+1$: Máme $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k$. Množina $\{a_j, j > n_k\}$ není shora omezená, takže nalezneme $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$ takové, že $a_{n_{k+1}} > k+1$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_k} > k$, ale k diverguje do ∞ , takže podle věty o dvou strážnících 17 $\lim a_{n_k} = \infty$.

(iii) $A = -\infty$: $\{a_n\}$ není zdola omezená. Máme tedy $\liminf a_n = -\infty$. Podle věty o dvou strážnících 17 je $\lim a_n = -\infty$, a tedy $-\infty \in H(\{a_n\})$.

Důkaz nerovnosti pro $\liminf a_n$. Označme $y \in H(\{a_n\})$. Pokud $\liminf a_n = -\infty$, pak $\liminf a_n = -\infty \leq y$. Předpokládejme tedy, že $\liminf a_n > -\infty$. Potom platí

$$\liminf a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{a_k, k \geq n\}.$$

Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = y$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\inf \{a_j, j \geq n_k\} \leq a_{n_k}.$$

Protože a_{n_k} konverguje k y a $\inf \{a_j, j \geq n_k\}$ konverguje k $\liminf a_n$, platí $\liminf a_n \leq y$, což jsme chtěli dokázat. Pro limes superior postupujeme obdobně. $\square$

Důsledek 1. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost. Potom je $H(\{a_n\})$ neprázdná.

Důkaz. $\limsup a_n \in H(\{a_n\})$ $\square$

Definice 37 (Bolzanova–Cauchyova podmínka). Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Věta 26. Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.

Důkaz.

$\Rightarrow$ Předpokládáme, že $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7)$$

Limita posloupnosti

Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0$ platí

$$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |a_m - A|.$$

Pak podle (7) je

$$|a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Podle BC podmínky nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Odtud plyne

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon.$$

Dále máme

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon.$$

Dostáváme tak, že $\limsup a_n, \liminf a_n \in \mathbb{R}$ a $0 \leq \limsup a_n - \liminf a_n \leq 2\varepsilon$. Platí tedy $\limsup a_n = \liminf a_n \in \mathbb{R}$, a tedy podle věty 23 existuje vlastní limita a_n . $\square$

Kapitola 3

Limita a spojitost funkce

3.1 Základní pojmy

Definice 38. Funkce f jedné reálné proměnné (dále jen **funkce**) je zobrazení $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice 39. Funkce $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ je **rostoucí** na intervalu J , jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$ platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci **klesající** (**neklesající**, **nerostoucí**) na intervalu J .

Definice 40. Monotónní funkcí (resp. ryze monotónní funkcí) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J .

Definice 41. Necht f je funkce a $M \subseteq \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická s periodou** $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $x + a \in \mathcal{D}(f)$, $x - a \in \mathcal{D}(f)$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$,
- **shora omezená** na M , jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- **zdola omezená** na M , jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- **omezená** na M , jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- **konstantní** na M , jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$.

3.2 Limita funkce

Definice 42. Necht $c \in \mathbb{R}$. Potom **okolím bodu** c rozumíme každou množinu tvaru $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. **Okolím** bodu ∞ rozumíme každou množinu tvaru $B(\infty, \varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. **Okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každou množinu $B(-\infty, \varepsilon) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$.

Definice 43. Necht $c \in \mathbb{R}$. Potom **prstencovým okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a kterou značíme $P(c, \varepsilon)$. **Prstencovým okolím** bodu ∞ rozumíme každou množinu tvaru $\left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a kterou značíme $P(\infty, \varepsilon)$. **Prstencovým okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každou množinu tvaru $\left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a kterou značíme $P(-\infty, \varepsilon)$.

☞ Necht $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*, c_1 \neq c_2$. Potom existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ takové, že $B(c_1, \varepsilon) \cap B(c_2, \varepsilon) = \emptyset$.

Definice 44. Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}^*$ je **limitou funkce** f v **bodě** $c \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in P(c, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Věta 27. Necht funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$ a limitu $B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí $A = B$.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $A \neq B$. Nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ takové, že $B(A, \varepsilon) \cap B(B, \varepsilon) = \emptyset$. Nalezneme $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_1, \delta_2 > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta_1) : f(x) \in B(A, \varepsilon), \forall x \in P(c, \delta_2) : f(x) \in B(B, \varepsilon).$$

Položme $\delta_3 = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Zvolme $z \in P(c, \delta_3)$. Potom platí $c \in P(c, \delta_1)$, a tedy $f(z) \in B(A, \varepsilon)$. Podobně máme $z \in P(c, \delta_2)$, a tedy $f(z) \in B(B, \varepsilon)$. Odtud plyne

$$f(z) \in B(A, \varepsilon) \cap B(B, \varepsilon) = \emptyset,$$

což je spor. □

Poznámka 24.

- (1) Pokud existuje limita funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$, pak ji značíme symbolem $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$.
- (2) Pokud existuje $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$, potom je f definována na jistém prstencovém okolí bodu c .
- (3) Limitu funkce můžeme počítat ve vlastním bodě c , tj. $c \in \mathbb{R}$, nebo v nevlastním bodě c , tj. $c \in \{\infty, -\infty\}$. Výsledek může být opět vlastní nebo nevlastní.
- (4) Necht $c, A \in \mathbb{R}$. Potom platí, že $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - c| < \delta : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

(5) Necht $c, A \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}, K > 0$. Potom $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - c| < \delta : |f(x) - A| < K\varepsilon.$$

Definice 45. Necht $c \in \mathbb{R}$.

- **Pravým okolím** bodu c rozumíme každý interval $[c, c + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B^+(c, \varepsilon)$,
- **levým okolím** bodu c rozumíme každý interval $(c - \varepsilon, c]$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B^-(c, \varepsilon)$,
- **pravým prstencovým okolím** bodu c rozumíme každý interval $(c, c + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P^+(c, \varepsilon)$,
- **levým prstencovým okolím** bodu c rozumíme každý interval $(c - \varepsilon, c)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P^-(c, \varepsilon)$.

Pokračujeme s definicí pro nevlastní hodnoty.

- **Pravým okolím bodu** $-\infty$ rozumíme každý interval $(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B^+(-\infty, \varepsilon)$,
- **levým okolím bodu** ∞ rozumíme každý interval $(\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B^-(\infty, \varepsilon)$,
- **pravým prstencovým okolím bodu** $-\infty$ rozumíme každý interval $(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P^+(-\infty, \varepsilon)$,
- **levým prstencovým okolím bodu** ∞ rozumíme každý interval $(\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P^-(\infty, \varepsilon)$.

Definice 46. Necht $A \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A , jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in P^+(c, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limitu zleva** v bodě $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Poznámka 25. Věta 27 platí analogicky i pro limitu zleva a limitu zprava. Značení: $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$, resp. $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$.

Příklad.

- Necht $c \in \mathbb{R}^*, A \in \mathbb{R}, \delta_0 \in \mathbb{R}, \delta_0 > 0$ splňují $\forall x \in P(c, \delta_0) : f(x) = A$. Potom $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.
- Necht $c \in \mathbb{R}^*$. Potom platí $\lim_{x \rightarrow c} x = c$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Položme $\delta = \varepsilon$. Potom platí $P(c, \delta) = P(c, \varepsilon) \subseteq B(c, \varepsilon)$, a tedy $\forall x \in P(c, \delta) : x \in B(c, \varepsilon)$.

☞ Necht f, g jsou funkce, $c \in \mathbb{R}^*$, $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$ a platí

$$\forall x \in P(c, \delta_0) : f(x) = g(x).$$

Potom $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*$.

Poznámka 26. Limita funkce v bodě má „lokální charakter“.

Definice 47. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** $c \in \mathbb{R}$, jestliže platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Poznámka 27. Funkce je spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in B(c, \delta) : f(x) \in B(f(c), \varepsilon).$$

Definice 48. Řekneme, že funkce f je **spojitá zprava** (resp. **zleva**) v bodě $c \in \mathbb{R}$, jestliže platí

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c) \quad (\text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)).$$

Definice 49. Necht $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Funkce $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ je **spojitá na intervalu** J , jestliže platí:

- f je spojitá zprava v každém bodě J , který není pravým koncovým bodem J ,
- f je spojitá zleva v každém bodě J , který není levým koncovým bodem J .

Poznámka 28. Necht $c \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$. Potom platí, že $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ právě tehdy, když $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = A$.

Implikace $\implies$ je zřejmá. Implikace $\impliedby$: Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}, \delta_1 > 0$ takové, že

$$\forall x \in P_1(c, \delta_1) : f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Podobně nalezneme $\delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_2 > 0$ takové, že

$$\forall x \in P_2(c, \delta_2) : f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Položme $\delta_3 = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Potom máme

$$P(c, \delta_3) \subseteq P^+(c, \delta_1) \cup P^-(c, \delta_2).$$

Pro každé $x \in P(c, \delta_3)$ platí $f(x) \in B(A, \varepsilon)$.

3.3 Věty o limitách

Věta 28. Necht funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ vlastní limitu. Pak existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.

Důkaz. Označme $A = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$. Potom platí $A \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = 1$. K němu nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon)$, neboli

$$\forall x \in P(c, \delta) : f(x) \in (A - 1, A + 1).$$

Tedy f je omezená na $P(c, \delta)$. □

Věta 29 (Aritmetika limit). *Nechť $A, B, c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B$. Potom platí:*

(a) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = A + B$, pokud je výraz na pravé straně definován,

(b) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = AB$, pokud je výraz na pravé straně definován,

(c) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Důkaz.

(b) Příklad $A, B \in \mathbb{R}$: Podle věty 28 nalezneme $K \in \mathbb{R}, K > 0$ takové, že existuje $\delta_0 \in \mathbb{R}, \delta_0 > 0$ splňující

$$\forall x \in P(c, \delta_0) : |f(x)| < K.$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta_1) : |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\forall x \in P(c, \delta_2) : |g(x) - B| < \varepsilon.$$

Položme $\delta = \min \{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$. Pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - AB| &= |f(x)g(x) - f(x)B + f(x)B - AB| \\ &\leq |f(x)(g(x) - B)| + |(f(x) - A)B| \\ &< K\varepsilon + \varepsilon|B| = (K + |B|)\varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud plyne $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = AB$.

(c) Příklad $A = \infty, B \in \mathbb{R}, B > 0$. Potom $\frac{A}{B} = \infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že platí

$$\begin{aligned} \forall x \in P(c, \delta_1) : f(x) &\in B\left(\infty, \frac{1}{2B}\varepsilon\right), \\ \forall x \in P(c, \delta_2) : g(x) &\in B\left(B, \frac{1}{2}B\right). \end{aligned}$$

Položme $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{\frac{2B}{\varepsilon}}{\frac{3}{2}B} = \frac{4}{3\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon},$$

tj. $\frac{f(x)}{g(x)} \in B(\infty, \varepsilon)$. □

Poznámka 29. Věta 29 platí analogicky i pro jednostranné limity.

Důsledek 2. Necht $c \in \mathbb{R}$ a f, g jsou spojité funkce v bodě c . Potom také $f + g$ a fg jsou spojité v bodě c . Pokud navíc $g(c) \neq 0$, pak i funkce $\frac{f}{g}$ je spojitá v c .

Příklad. Funkce $x \mapsto c, x \in \mathbb{R}$ a $x \mapsto x, x \in \mathbb{R}$ jsou spojité na $\mathbb{R}$. Odtud a z důsledku 2 plyne, že každý polynom je spojitý v každém bodě z $\mathbb{R}$.

Věta 30. Necht $A \in \mathbb{R}^*, A > 0, c \in \mathbb{R}^*, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ a existuje $\eta \in \mathbb{R}, \eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \eta)$ platí $g(x) > 0$. Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Důkaz. Rozlišíme dva případy

i. $A \in \mathbb{R}$: Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že

$$\begin{aligned} \forall x \in P(c, \delta_1) : |f(x) - A| &< \frac{1}{2}A, \\ \forall x \in P(c, \delta_2) : |g(x) - 0| = |g(x)| &< \frac{1}{2}A\varepsilon. \end{aligned}$$

Položme $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Potom pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{\frac{1}{2}A}{\frac{1}{2}A\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon},$$

tj. $\frac{f(x)}{g(x)} \in B(\infty, \varepsilon)$. Potom tedy $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

ii. $A = \infty$: Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že

$$\begin{aligned} \forall x \in P(c, \delta_1) : f(x) &\in B(\infty, \varepsilon), \\ \forall x \in P(c, \delta_2) : g(x) &\in B(0, 1). \end{aligned}$$

Položme $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Potom pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{1} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Odtud plyne $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. □

Věta 31 (Limita a uspořádání). Necht $c \in \mathbb{R}^*$ a funkce f a g mají limity v c .

(a) Necht

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) > \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

Pak existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta) : f(x) > g(x).$$

(b) Nechť existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta) : f(x) \leq g(x).$$

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

Důkaz. Označme $A = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$.

(a) Nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ takové, že $B(A, \varepsilon) \cap B(B, \varepsilon) = \emptyset$. Potom pro každé $y_1 \in B(A, \varepsilon)$ a $y_2 \in B(B, \varepsilon)$ platí $y_1 > y_2$. Nalezneme $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1) : f(x) \in B(A, \varepsilon),$$

$$\forall x \in P(c, \delta_2) : g(x) \in B(B, \varepsilon).$$

Položme $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Potom pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí $f(x) \in B(A, \varepsilon)$, $g(x) \in B(B, \varepsilon)$, a tedy $f(x) > g(x)$.

(b) Pro spor předpokládejme, že $A > B$. Podle již dokázaného bodu (a) nalezneme $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c, \eta) : f(x) > g(x).$$

Zvolme $z \in P(c, \min \{\delta, \eta\})$. Potom platí

$$f(z) > g(z) \geq f(z),$$

což je spor. (Druhá nerovnost z předpokladu.) □

Věta 32 (O dvou strážnících). Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, a funkce f , g a h splňují:

- $\forall x \in P(c, \eta) : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$,
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = A$.

Potom existuje $\lim_{x \rightarrow c} h(x)$ a rovná se A .

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1) : f(x) \in B(A, \varepsilon),$$

$$\forall x \in P(c, \delta_2) : g(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Položme $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Potom pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí $f(x), g(x) \in B(A, \varepsilon)$ a navíc $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, tedy $h(x) \in B(A, \varepsilon)$. Odtud plyne, že $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = A$. □

Poznámka 30. Pokud $A = \infty$, stačí strážník f . Podobně pro $A = -\infty$.

Důsledek 3. Necht $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ a existuje $\eta \in \mathbb{R}, \eta > 0$ takové, že funkce g je na $P(c, \eta)$ omezená. Potom $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0$.

Důkaz. Nalezneme $K \in \mathbb{R}, K > 0$ takové, že $\forall x \in P(c, \eta) : |g(x)| < K$. Platí také $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$. Potom $\forall x \in P(c, \eta)$ platí

$$-K|f(x)| \leq f(x)g(x) \leq K|f(x)|.$$

Odtud podle věty o dvou strážnících máme $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0$. □

Věta 33 (Limita složené funkce). Necht $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^*$, f, g jsou funkce, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$, $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$ existuje a je splněna alespoň jedna z podmínek:

$$(P) \quad \exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0 \quad \forall x \in P(x_0, \eta) : g(x) \neq y_0,$$

$$(S) \quad f \text{ je spojitá v bodě } y_0.$$

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y).$$

Důkaz. Označme $A = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$. Chceme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = A$.

(P) Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K nim nalezneme $\psi \in \mathbb{R}, \psi > 0$ takové, že

$$\forall y \in P(y_0, \psi) : f(y) \in B(A, \varepsilon).$$

K ψ nalezneme $\delta' \in \mathbb{R}, \delta' > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(x_0, \delta') : g(x) \in B(y_0, \psi).$$

Necht $\eta \in \mathbb{R}, \eta > 0$ splňuje podmínku (P). Položme $\delta = \min \{\delta', \eta\}$. Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí $g(x) \in B(y_0, \psi)$ a $g(x) \neq y_0$, tedy $g(x) \in P(y_0, \psi)$. Odtud plyne $f(g(x)) \in B(A, \varepsilon)$.

(S) Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu díky (S) nalezneme $\psi \in \mathbb{R}, \psi > 0$ takové, že

$$\forall y \in B(y_0, \psi) : f(y) \in B(f(y_0), \varepsilon),$$

neboť $A = f(y_0)$. K ψ nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(x_0, \delta) : g(x) \in B(y_0, \psi).$$

Potom pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí $f(g(x)) \in B(f(y_0), \varepsilon) = B(A, \varepsilon)$. □

Důsledek 4. Jestliže je funkce g spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je spojitá v bodě $g(c)$, potom je funkce $f \circ g$ spojitá v bodě c .

Poznámka 31. Platí i varianty věty 33 pro jednostranné limity, např.: Nechť $x_0, y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-\infty\}$, f, g jsou funkce, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = y_0$, $\lim_{y \rightarrow y_0^+} f(y)$ existuje a je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

$$(P) \quad \exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0 \forall x \in P_+(x_0, \eta) : g(x) > y_0,$$

$$(S) \quad f \text{ je spojitá v bodě } y_0,$$

$$\text{potom } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0^+} f(y).$$

Věta 34 (Heine). Nechť $c, A \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = A.$$

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující

$$\bullet \quad \forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq c$$

$$\bullet \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$$

$$\text{platí } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Důkaz.

$\Rightarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost splňující

$$\bullet \quad \forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq c,$$

$$\bullet \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c.$$

Chceme ukázat, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Díky (i) nalezneme k ε číslo $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

K δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : x_n \in B(c, \delta),$$

neboť $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Pak máme

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : x_n \in P(c, \delta).$$

Potom z předchozího plyne

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : f(x_n) \in B(A, \varepsilon).$$

Odtud $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

$\Leftarrow$ Obměnou. Předpokládejme negaci (i):

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \exists x \in P(c, \delta) : \neg(f(x) \in B(A, \varepsilon)).$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ a podle $\neg (i)$ splňuje

$$\forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \exists x \in P(c, \delta) : \neg(f(x) \in B(A, \varepsilon)).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in P\left(c, \frac{1}{n}\right)$ takové, že $\neg(f(x_n) \in B(A, \varepsilon))$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x_n \neq c$. Dále máme $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Zvolme $\tau \in \mathbb{R}, \tau > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{n_0} < \tau$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$x_n \in P\left(c, \frac{1}{n}\right) \subseteq P\left(c, \frac{1}{n_0}\right) \subseteq B(c, \tau).$$

Neplatí však $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $\neg(f(x_n) \in B(A, \varepsilon))$. $\square$

Poznámka 32. Lze formulovat varianty Heineovy věty, např.: Nechť $c \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní:

- (i) f je spojitá zprava v bodě c ,
- (ii) pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující

- $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq c$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$,

platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c)$.

Příklad. Uvažujme funkci $f(x) = \sin \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Položme $x_n = \frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{N}, y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, n \in \mathbb{N}$. Platí $x_n \neq 0, y_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Navíc je

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi) = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \end{aligned}$$

tedy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ neexistuje.

Věta 35 (Limita monotónní funkce). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*, a < b$, f je monotónní funkce na intervalu (a, b) . Potom existují $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$, přičemž platí:

(a) je-li f na (a, b) neklesající, pak

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf f((a, b)) \quad a \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup f((a, b)),$$

(b) je-li f na (a, b) nerostoucí, pak

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \sup f((a, b)) \quad a \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \inf f((a, b)).$$

Důkaz.

- (a) Označme $m = \inf f((a, b))$. Předpokládejme, že $m \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Podle definice infima není číslo $m + \varepsilon$ dolní závorou množiny $f((a, b))$. Nalezneme $x' \in (a, b)$ takové, že $m \leq f(x') < m + \varepsilon$. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že $P^+(a, \delta) \subseteq (a, x')$. Potom pro každé $x \in P^+(a, \delta)$ platí, že $a < x < x'$, a tedy

$$m - \varepsilon < m \leq f(x) \leq f(x') < m + \varepsilon.$$

Potom máme $f(x) \in B(m, \varepsilon)$. Podobně postupujeme, pokud $m = -\infty$.

- (b) Obdobně. □

3.4 Funkce spojité na intervalu

Věta 36 (Bolzano). *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $f(\xi) = C$.*

Důkaz. Nechť $C \in (f(a), f(b))$. Položme $M = \{z \in [a, b], f(z) < C\}$. Množina M je neprázdná ($a \in M$) a shora omezená, neboť $M \subseteq [a, b]$. Označme $\xi = \sup M$ (používáme vlastnost suprema). Přivedeme ke sporu možnost, že $f(\xi) < C$ i $f(\xi) > C$.

- (i) Pro spor předpokládejme, že $f(\xi) < C$. Platí tedy, že $\xi < b$. Funkce f je v ξ spojitá zprava. Podle věty 31 (a) nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in [\xi, \xi + \delta) : f(x) < C.$$

Potom máme, že $[\xi, \xi + \delta) \subseteq M$, což je spor.

- (ii) Pro spor předpokládejme, že $f(\xi) > C$. Potom $\xi > a$. Funkce f je zleva spojitá v ξ . Podle věty 31 (a) nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (\xi - \delta, \xi] : f(x) > C.$$

Potom $M \subseteq [a, \xi - \delta]$, což je spor ($\xi - \delta < \xi$ a ξ je horní závora). □

Poznámka 33. Věta 36 platí i v případě, že $f(a) > f(b)$.

Lemma 2. *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ a platí*

$$\forall x, y \in M \quad \forall z \in \mathbb{R} : x < z < y \implies z \in M.$$

Pak M je interval.

Důkaz. Pokud $M = \emptyset$, pak M je interval. Předpokládejme tedy, že $M \neq \emptyset$. Položme $a = \inf M, b = \sup M$. Ověříme, že interval $(a, b) \subseteq M \subseteq (a, b) \cup \{a, b\}$. Nejprve ověříme $(a, b) \subseteq M$. Zvolme $z \in (a, b)$. Nalezneme prvky $x, y \in M$ splňující $x < z$ a $z < y$. Podle podmínky ze znění máme $z \in M$. Nyní ověříme $M \subseteq (a, b) \cup \{a, b\}$. Zvolme $z \in M$. Potom $a \leq z \leq b$. Odtud plyne $z \in (a, b) \cup \{a, b\}$. □

Věta 37. *Nechť funkce $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu J . Potom je $f(J)$ interval.*

Důkaz. Použijeme lemma 2. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$ a $z \in \mathbb{R}$ splňují $y_1 < z < y_2$. Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ takové, že $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. Podle věty 36 nalezneme $\xi \in (x_1, x_2)$ (resp. $\xi \in (x_2, x_1)$) splňující $f(\xi) = z$ (f je spojitá na J , a tedy i na $[x_1, x_2]$, resp. $[x_2, x_1]$). Máme tedy $z \in f(J)$. Podle lemmatu 2 je $f(J)$ interval. $\square$

Věta 38. *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom je f na $[a, b]$ omezená.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že f není omezená shora. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in [a, b]$ takové, že $f(x_n) > n$. Díky Weierstrassově větě nalezneme vybranou posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x^* \in [a, b]$. Z varianty Heineovy věty plyne $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x^*) \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N} : f(x_{n_k}) > n_k \geq k$. Odstud plyne $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty$, což je spor. $\square$

Poznámka 34. V důkazu věty 38 jsme užili následující variantu Heineovy věty: Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Pak je ekvivalentní:

- (i) f je spojitá na I ,
- (ii) pro každé $c \in I$ a každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků intervalu I splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c)$.

Definice 50. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}, x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subseteq \mathcal{D}(f)$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) na M , jestliže platí

$$\forall y \in M : f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M : f(y) \geq f(x)).$$

Bod x nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M . Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

Definice 51. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}, x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subseteq \mathcal{D}(f)$). Řekneme, že funkce f má v bodě x

- **lokální maximum vzhledem k M** , jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M$ platí $f(y) \leq f(x)$,
- **lokální minimum vzhledem k M** , jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M$ platí $f(y) \geq f(x)$.

Věta 39. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom f nabývá na $[a, b]$ svého maxima a svého minima.*

Důkaz. Dokážeme existenci maxima. Podle věty 38 je f omezená na intervalu $[a, b]$, a proto $G = \sup f([a, b])$ je prvkem $\mathbb{R}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in [a, b]$ splňující $f(x_n) > G - \frac{1}{n}$.

Pomocí Weierstrassovy věty nalezneme vybranou posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} \in \mathbb{R}$. Potom platí, že $x^* = \lim x_{n_k} \in [a, b]$. Dále máme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = G$, neboť

$$\forall n \in \mathbb{N} : G - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq G,$$

a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = G$. Podle Heineovy věty máme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x^*)$. Odtud $f(x^*) = G$. $\square$

Věta 40 (O inverzní funkci). *Nechť f je spojitá a rostoucí (resp. klesající) funkce na intervalu J . Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (resp. klesající) na intervalu $f(J)$.*

Důkaz. Funkce f je rostoucí, a tedy prostá. Funkce f^{-1} je tedy dobře definovaná na $f(J)$. Množina $f(J)$ je interval podle věty 37. Je-li f rostoucí (resp. klesající), pak je snadné ukázat, že f^{-1} je rostoucí (resp. klesající). Předpokládejme, že $y_0 \in f(J)$ není pravým koncovým bodem intervalu $f(J)$. Budeme dokazovat, že f^{-1} je spojitá zprava v bodě y_0 . Označme $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Bod y_0 není pravý koncový bod $f(J)$, a tedy x_0 není pravý koncový bod J , neboť f je rostoucí. Nalezneme $x_1 \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \cap J$. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že $f(x_1) = y_0 + \delta$. Pak pro každé $y \in [y_0, y_0 + \delta)$ platí $x_0 = f^{-1}(y_0) \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_0 + \delta) = x_1$, takže $f^{-1}(y) \in [x_0, x_1] \subseteq B(x_0, \varepsilon) = B(f^{-1}(y_0), \varepsilon)$. Spojitost zleva v bodě, který není levým koncovým bodem $f(J)$, by se dokazovala analogicky. $\square$

Kapitola 4

Elementární funkce

Věta 41. *Existuje právě jedna funkce $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující*

$$(E1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y),$$

$$(E2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$$

4.1 Vlastnosti exponenciální funkce

$$(E3) \quad \underline{\exp(0) = 1}$$

Podle (E1) platí $\exp(0) = \exp(0 + 0) = \exp(0) \cdot \exp(0)$, neboli $\exp(0) = \exp(0)^2$, tedy $\exp(0)$ je buď 0 nebo 1. Kdyby $\exp(0) = 0$, potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\exp(x) = \exp(x + 0) = \exp(x) \cdot \exp(0) = 0,$$

což je spor s (E2).

$$(E4) \quad \underline{\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) \cdot \exp(-x) = 1}$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x).$$

$$(E5) \quad \underline{\forall n \in \mathbb{Z} \forall x \in \mathbb{R} : \exp(nx) = \exp(x)^n}$$

- $n = 0$: pro $x \in \mathbb{R}$ je $\exp(0 \cdot x) = \exp(0) = 1 = \exp(x)^0$
- $n \rightsquigarrow n + 1$: pro $x \in \mathbb{R}$ je

$$\begin{aligned} \exp((n + 1)x) &= \exp(nx + x) = \exp(nx) \cdot \exp(x) = \exp(x)^n \cdot \exp(x) \\ &= \exp(x)^{n+1} \end{aligned}$$

- $n \in \mathbb{Z}, n < 0$: pro $x \in \mathbb{R}$ je

$$\exp(nx) = \exp(-(-nx)) = \frac{1}{\exp(-nx)} = \frac{1}{\exp(x)^{-n}} = \exp(x)^n$$

(E6) $\forall x \in (0, \infty) : \exp(x) > 1$

Z vlastnosti (E2) plyne, že existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že

$$\forall z \in (0, \delta] : \exp(z) - 1 > 0.$$

Položme $k = \lfloor \frac{x}{\delta} \rfloor$. Potom můžeme psát

$$x = k\delta + z, \quad z \in [0, \delta).$$

Potom máme

$$\exp(x) = \exp(k\delta + z) = \exp(k\delta) \cdot \exp(z) = \underbrace{\exp(\delta)^k}_{>1 \text{ pro } k \geq 1} \cdot \exp(z) > 1,$$

pokud $k = 0$, pak $z > 0$.

(E7) $\forall x \in (-\infty, 0) : \exp(x) \in (0, 1)$

Plyne z (E4) a (E6).

(E8) $\exp$ je rostoucí na $\mathbb{R}$

Zvolme $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. Položme $k = y - x$. Potom $k > 0$ a platí

$$\exp(y) = \exp(x + k) = \underbrace{\exp(x)}_{>0} \cdot \underbrace{\exp(k)}_{>1} > \exp(x).$$

(E9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$

Podle věty 35 (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x)$ existuje, neboť $\exp$ je rostoucí. Podle Heineovy věty platí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(n) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x)$. Navíc máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp(1))^n = \infty, \quad (E6) \implies \exp(1) > 1.$$

(E10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$

Plyne z (E9) a (E4):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\exp(-x)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$g(x) = x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$$

$$f(y) = \exp(y)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = \infty$$

je splněna podmínka (P)

(E11) $\exp$ je spojitá na $\mathbb{R}$

spojitá v 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\exp(x) - 1}{x} \cdot x + 1 \right) = 1 \cdot 0 + 1 = 1 = \exp(0)$$

spojitá na $c \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow c} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow c} \exp(x - c + c) = \lim_{x \rightarrow c} \exp(x - c) \cdot \exp(c) = 1 \cdot \exp(c) = \exp(c)$$

(E12) $\mathcal{H}(\exp) = (0, \infty)$

Díky větě 37 a (E11) máme, že $\mathcal{H}(\exp) = \exp(\mathbb{R})$ je interval. Víme, že platí $\mathcal{H}(\exp) \subseteq (0, \infty)$. Z (E9) a (E10) plyne $\mathcal{H}(\exp) = (0, \infty)$.

Označení. Eulerovo číslo $e = \exp(1)$.

Definice 52.

(a) Funkce $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je definována jako inverzní funkce k funkci $\exp$. Nazývá se **přirozeným logaritmem**.

(b) Je-li $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, pak definujeme $\log_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

(c) Nechť $a \in \mathbb{R}, a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$. Potom definujeme reálné číslo a^b předpisem $a^b = \exp(b \log a)$.

(d) Nechť $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Potom funkci $x \mapsto a^x, x \in \mathbb{R}$, nazýváme **obecnou mocninou**.

4.2 Vlastnosti logaritmu

(L1) $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$

Platí totiž $\mathcal{H}(\exp) = (0, \infty)$.

(L2) $\mathcal{H}(\log) = \mathbb{R}$

Platí totiž $\mathcal{D}(\exp) = \mathbb{R}$.

(L3) $\log(1) = 0$

Je totiž $\exp(0) = 1$.

$$(L4) \quad \underline{\forall x, y \in (0, \infty) : \log(xy) = \log x + \log y}$$

Pro $x, y \in (0, \infty)$ označme $a = \log x, b = \log y$. Potom

$$\log(xy) = \log(\exp(a) \exp(b)) = \log(\exp(a+b)) = a+b = \log x + \log y.$$

$$(L5) \quad \underline{\forall x \in (0, \infty) : \log \frac{1}{x} = -\log x}$$

Platí

$$0 = \log(1) = \log\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \log(x) + \log\left(\frac{1}{x}\right),$$

odkud máme $\log \frac{1}{x} = -\log x$.

$$(L6) \quad \underline{\forall n \in \mathbb{Z} \forall x \in (0, \infty) : \log(x^n) = n \log x}$$

- $n = 0$: platí
- $n \rightsquigarrow n+1 : (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}), x \in (0, \infty)$

$$\log(x^{n+1}) = \log(x^n \cdot x) = \log(x^n) + \log(x) = n \log x + \log x = (n+1) \log x.$$

- $n \in \mathbb{Z}, n < 0 : x \in (0, \infty)$

$$\log(x^n) = \log\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\log(x^{-n}) = (-1) \cdot (-n) \cdot \log x = n \log x.$$

$$(L7) \quad \underline{\log \text{ je rostoucí na } (0, \infty)}$$

$\exp$ je rostoucí na $\mathbb{R}$

$$(L8) \quad \underline{\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty}$$

Z věty o limitě monotónní funkce, faktu že $\log$ je rostoucí a toho, že $\mathcal{H}(\log) = \mathbb{R}$ plyne, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$.

$$(L9) \quad \underline{\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty}$$

Podobně jako v (L8).

$$(L10) \quad \underline{\log \text{ je spojitá na } (0, \infty)}$$

Plyne ze spojitosti $\exp$, (E5) a věty 40.

$$(L11) \quad \underline{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = 1}$$

Vezměme si

$$f(y) = \frac{\exp(y) - 1}{y}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$$

$$g(x) = \log x$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0 \text{ je splněna podmínka (P),}$$

odkud máme

$$\lim_{x \rightarrow 1} f \circ g(x) = 1,$$

tedy že

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\exp(\log x) - 1}{\log x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\log x} = 1.$$

Poznámka 35.

(i) Pro $a \in \mathbb{R}, a > 0, n \in \mathbb{Z}$ je

$$a^n = \exp(n \log a) = \exp(\log(a^n)) = a^n,$$

tedy definice obecné mocniny je kompatibilní s (L6).

(ii) Pro $n \in \mathbb{N}$ je funkce

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

- pro n sudé rovna inverzní funkci k $f(x) = x^n, x \in [0, \infty)$,
- pro n liché rovna inverzní funkci k $h(x) = x^n, x \in \mathbb{R}$.

Platí $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ je spojitá na svém definičním oboru (podle věty 40).

Věta 42 (Základní vlastnosti sinu a kosinu). *Existuje právě jedno kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a právě jedna dvojice funkcí **sinus** ($\sin$) a **kosinus** ($\cos$), které mají následující vlastnosti:*

(G1) pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

(G2) pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

(G3) $\sin$ je lichá a $\cos$ je sudá funkce,

(G4) $\sin$ je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(0) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$,

(G5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

4.3 Vlastnosti sinu a kosinu

(G6) $\cos(0) = 1$

Zvolme $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Podle (G1) platí

$$\sin x = \sin(x + 0) = \sin x \cos 0 + \cos x \sin 0 = \sin x \cos 0,$$

Elementární funkce

a protože $\sin x \neq 0$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, je

$$\cos 0 = 1.$$

$$(G7) \quad \underline{\forall x \in \mathbb{R} : \sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

Platí

$$1 = \cos(0) = \cos(x - x) = \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x) = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

$$(G8) \quad \underline{\forall x \in \mathbb{R} : |\sin x| \leq 1 \wedge |\cos x| \leq 1}$$

Plyne z (G7).

$$(G9) \quad \underline{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0}$$

Podle (G7) máme

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

ale $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ je podle (G4) rovno 1, takže

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \implies \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$(G10) \quad \underline{\forall x \in \mathbb{R} : \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x}$$

Z (G1) a (G9) plyne

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos x \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

$$(G11) \quad \underline{\forall x \in \mathbb{R} : \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x}$$

Z (G2) plyne

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} - \sin x \sin\frac{\pi}{2} = -\sin x.$$

$$(G12) \quad \underline{\text{sinus a kosinus jsou } 2\pi \text{ periodické}}$$

Z (G10) a (G11) plyne

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin\left(x + \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) \\ &= -\sin(x + \pi) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x. \end{aligned}$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \text{ analogicky.}$$

$$(G13) \quad \underline{\text{sinus a kosinus jsou spojité na } \mathbb{R}}$$

- sinus je spojitý v nule:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot x = 1 \cdot 0 = 0 = \sin 0.$$

- kosinus je spojitý v nule:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x &= \lim_{x \rightarrow 0} \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right) = 1 - 2 \cdot 0^2 = 1 = \cos 0. \end{aligned}$$

- spojitost sinu v $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x &= \lim_{x \rightarrow x_0} \sin((x - x_0) + x_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\sin(x - x_0) \cos x_0 + \cos(x - x_0) \sin x_0) \\ &= 0 \cdot \cos x_0 + \cos 0 \cdot \sin x_0 = \sin x_0. \end{aligned}$$

- spojitost kosinu v $x_0 \in \mathbb{R}$: obdobně s pomocí (G2)

$$(G14) \quad \{x \in \mathbb{R}, \sin x = 0\} = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \text{ a } \{x \in \mathbb{R}, \cos x = 0\} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Platí

$$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \sin x > 0 \qquad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) : \sin x < 0.$$

Dále pro $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ je

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x - \pi).$$

Podobně když $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, máme $\sin x = -\sin(x - \pi)$. Odtud dostáváme, že nulové body jsou právě v $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ a $\frac{3\pi}{2}$. Pro kosinus dostaneme z (G11) posunutím o $\frac{\pi}{2}$.

Definice 53. Funkce **tangens** (značíme ji tg) a **kotangens** (značíme ji cotg) definujeme předpisy

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x) &= \frac{\sin x}{\cos x}, & x &\in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}, \\ \operatorname{cotg}(x) &= \frac{\cos x}{\sin x}, & x &\in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Goniometrickými funkcemi rozumíme $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{cotg}$.

Definice 54. Cyklometrické funkce **arkussinus** ($\arcsin$), **arkuskosinus** ($\arccos$), **arkustan-**

gens ($\arctg$) a **arkuskotangens** ($\operatorname{arccotg}$) definujeme následovně:

$$\begin{aligned}\arcsin &= (\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}, \\ \arccos &= (\cos|_{[0, \pi]})^{-1}, \\ \arctg &= (\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1}, \\ \operatorname{arccotg} &= (\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)})^{-1}.\end{aligned}$$

Věta 43. *Funkce $\log$, $\exp$, $\sin$, $\cos$, tg , cotg , $\arcsin$, $\arccos$, $\arctg$ a $\operatorname{arccotg}$ jsou spojité na svých definičních oborech.*

Důkaz. Spojitosti funkcí $\log$, $\exp$, $\sin$, $\cos$ jsme již dokázali. Funkce tg a cotg dostaneme pomocí věty o aritmetice limit. Zbývá tedy dokázat spojitost funkcí $\arcsin$, $\arccos$, $\arctg$, $\operatorname{arccotg}$. To dostaneme podle věty 40. $\square$

Kapitola 5

Derivace

5.1 Definice a základní vztahy

Definice 55. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Existuje-li limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak její hodnotu nazýváme **derivací** funkce f v bodě a . Obdobně definujeme **derivaci zprava** a **derivaci zleva** funkce f v bodě a předpisy

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Derivaci zleva v bodě a a derivaci zprava v bodě a nazýváme **jednostrannými derivacemi**.

Označení. Pokud derivace existuje, je určena jednoznačně (důsledek věty 27). Používáme značení $f'(a)$, $f'_+(a)$, $f'_-(a)$.

Poznámka 36.

i. Derivace

$$f'(a) \begin{cases} \text{existuje,} \\ \text{neexistuje} \end{cases} \begin{cases} \text{je vlastní, tj. } \in \mathbb{R}, \\ \text{je nevlastní } \begin{cases} \infty, \\ -\infty. \end{cases} \end{cases}$$

ii. $f'(a) \implies \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 : f$ je definována na okolí $B(a, \delta)$

iii. $f'(a) = A \in \mathbb{R}^* \iff f'_+(a) = f'_-(a) = A \in \mathbb{R}^*$

iv. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

v. Derivace je lokální pojem.

Poznámka 37 (Derivace a tečna). Necht $a \in \mathbb{R}$, f je funkce a $f'(a) \in \mathbb{R}$. Tečnou ke grafu f v bodě $[a, f(a)]$ rozumíme funkci

$$t : x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a).$$

Platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} \\ &= \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0. \end{aligned}$$

Poznámka 38. Definičním oborem derivace funkce f rozumíme množinu $\{x \in \mathbb{R}, f'(x) \in \mathbb{R}\}$.

Příklad.

i. $f(x) = c, c \in B(a, \delta)$, kde $\delta > 0, a \in \mathbb{R}$. Platí

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = 0.$$

ii. $f(x) = x^m$, kde $m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$:

Pro $a \in \mathbb{R}$:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^{m-1} + x^{m-2}a + \dots + a^{m-1})}{x - a} = na^{n-1}.$$

iii. $f(x) = \operatorname{sgn} x, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty, \end{aligned}$$

odkud máme, že $\operatorname{sgn}'(0) = \infty$.

iv. $f(x) = |x|$

$$f'_+(0) = 1, \quad f'_-(0) = -1,$$

a proto derivace $f'(0)$ neexistuje.

Věta 44 (Derivace a spojitost). Necht funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom je f v bodě a spojitá.

Důkaz. Počítejme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) + f(a) \right) = \underbrace{f'(a)}_{\in \mathbb{R}} \cdot 0 + f(a) = f(a).$$

**Poznámka 39.**

- (i) Věta 44 platí i v jednostranné verzi.
 (ii) Předpoklad, že $f'(a)$ je vlastní, nelze vynechat (vizte funkci signum v nule).

Věta 45 (Aritmetika derivací). *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f, g jsou funkce, které mají v bodě a derivaci.*

(a) Pak platí

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(b) Nechť alespoň jedna z funkcí f a g je spojitá v bodě a . Potom platí

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(c) Nechť funkce g je spojitá v bodě a . Potom platí

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)},$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz.

(a) Platí

$$\begin{aligned} (f + g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(a + h) - (f + g)(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) + g(a + h) - f(a) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a + h) - f(a)}{h} + \frac{g(a + h) - g(a)}{h} \right) \\ &= f'(a) + g'(a). \end{aligned}$$

(b) Předpokládejme, že g je spojitá v a . Pak

$$\begin{aligned} (fg)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(a + h) - (fg)(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h)g(a + h) - f(a)g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a + h) - f(a))g(a + h) + f(a)(g(a + h) - g(a))}{h} \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \end{aligned}$$

(c) Platí

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h)}{g(a+h)g(a)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(a+h)g(a)} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} g(a) - f(a) \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) \\
&= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \quad \square
\end{aligned}$$

Věta 46 (Derivace složené funkce). *Nechť funkce g je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, má v tomto bodě derivaci a funkce f má derivaci v bodě $g(a)$. Pak platí*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Označme $b = g(a)$,

$$\varphi(y) = \frac{f(y) - f(b)}{y - b}, \quad y \in \mathcal{D}(f) \setminus \{b\}.$$

Platí $\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = f'(b)$. Rozlišíme dva případy

(i) $g'(a) \neq 0$: nalezneme $\eta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(a, \eta) : \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \neq 0.$$

Odtud plyne, že

$$\forall x \in P(a, \eta) : g(x) \neq g(a).$$

Počítejme

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \varphi(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.
\end{aligned}$$

(ii) $g'(a) = 0$: Výraz na pravé straně je definován, a proto $f'(b) \in \mathbb{R}$. Nalezneme $c > 0, \delta > 0$ taková, že

$$\forall y \in P(b, \delta) : |\varphi(y)| < c \quad (\text{věta 28}).$$

Dále

$$\begin{aligned}\forall y \in P(b, \delta) : \left| \frac{f(y) - f(b)}{y - b} \right| &< c, \\ \forall y \in B(b, \delta) : |f(y) - f(b)| &\leq c \cdot |y - b|.\end{aligned}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\rho_1 > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \rho_1) : \left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Dále nalezneme $\rho_2 \in (0, \rho_1)$ takové, že

$$\forall x \in B(a, \rho_2) : g(x) \in B(b, \delta).$$

Pro každé $x \in P(a, \rho_2)$ platí

$$\left| \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} \right| \leq \frac{c|g(x) - g(a)|}{|x - a|} = c \cdot \left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right| < c\varepsilon,$$

odkud plyne $(f \circ g)'(a) = 0 = f'(b) \cdot 0 = f'(b) \cdot g'(a)$. □

Poznámka 40. V čem je problém:

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(b) \cdot g'(a).\end{aligned}$$

Funkce

$$\begin{array}{ll} y \mapsto \frac{f(y) - f(b)}{y - b} & \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b) - f'(g(a)) \\ g(a) = b & \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) = b \end{array}$$

Věta 47 (Derivace inverzní funkce). *Nechť a je vnitřním bodem intervalu I a f je spojitá a ryze monotónní funkce na I . Označme $b = f(a)$.*

(a) *Nechť $f'(a)$ existuje a je nenulová. Potom platí*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(Je-li $f'(a) = \pm\infty$, pak $(f^{-1})'(b) = 0$.)

(b) *Nechť $f'(a) = 0$ a f je rostoucí na I . Potom $(f^{-1})'(b) = \infty$.*

(c) *Nechť $f'(a) = 0$ a f je klesající na I . Potom $(f^{-1})'(b) = -\infty$.*

Důkaz. Funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Označme $J = f(I)$. Podle věty 37 je J interval. Inverzní funkce

f^{-1} je tedy $J \rightarrow I$. Podle věty 40 je f^{-1} spojitá a ryze monotónní. Označme

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in \mathcal{D}(f) \setminus \{a\}.$$

Platí $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = f'(a)$ v případech (a) až (c). Dále platí $\lim_{y \rightarrow b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$, neboť b je vnitřním bodem J a f^{-1} je spojitá na intervalu J .

(a) Počítáme $\lim_{y \rightarrow b} (\varphi \circ f^{-1})(y)$, a je splněna podmínka (P), protože f^{-1} je ryze monotónní. Máme tedy

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{y \rightarrow b} (\varphi \circ f^{-1})(y) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)},$$

tedy

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\frac{y-b}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) Podobně jako v (a) máme, že

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = f'(a) = 0.$$

Potom platí podle věty 30

$$(f^{-1})' = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\frac{y-b}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}} = \infty.$$

(c) Analogicky jako (b). □

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c, x \in \mathbb{R}$
 $f'(x) = 0, x \in \mathbb{R}$
- $(x^n)' = nx^{n-1}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $(\exp(x))' = \exp(x), x \in \mathbb{R}$

$$(\exp(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x)$$

- $(\log x)' = \frac{1}{x}, x \in (0, \infty)$

$$(\log x)' = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

$$f(z) = \exp(z)$$

$$f^{-1}(x) = \log x$$

- $(x^a)' = ax^{a-1}, x \in (0, \infty), a \in \mathbb{R}$

$$(x^a)' = (e^{a \log x})' = e^{a \log x} \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

- $(a^x)' = a^x \log a, x \in \mathbb{R}, a > 0$

$$(a^x)' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a.$$

Poznámka 41. Funkce x^x se nehodí derivovat podle žádného z předchozích bodů, ale

$$(x^x)' = (e^{x \log x})' = e^{x \log x} \cdot \left(x \log x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (\log x + 1), x > 0.$$

- $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt[n]{x}}{x}$ pro $x \in (0, \infty)$ pro $n \in \mathbb{N}$ sudé, nebo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pro $n \in \mathbb{N}$ liché. Dále $(\sqrt[n]{x})' = \infty$ pro $x = 0$ a $n \in \mathbb{N}$ liché, $(\sqrt[n]{x})'_+ = \infty$ pro $x = 0$ a $n \in \mathbb{N}$ sudé.
- $(\sin x)' = \cos x, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right), \end{aligned}$$

ale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h^2} \cdot h = \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 0,$$

tedy $(\sin x)' = \cos x$.

- $(\cos x)' = -\sin x, x \in \mathbb{R}$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \in \mathcal{D}(\operatorname{cotg})$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$

$$f(z) = \sin z, z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$f^{-1}(x) = \arcsin x, x \in [-1, 1]$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \implies \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$

Věta 48 (Nutná podmínka lokálního extrému). Jestliže a je bodem lokálního extrému funkce f , potom buď $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $f'(a)$ existuje a $f'(a) \neq 0$. Předpokládejme nejprve, že $f'(a) > 0$. Potom

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta) : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Potom

$$\forall x \in (a, a + \delta) : f(x) > f(a), \quad \forall x \in (a - \delta, a) : f(x) < f(a).$$

Proto a není bodem lokálního extrému, což je spor. Příklad $f'(a) < 0$ lze přivést ke sporu analogicky. $\square$

Příklad (Častá úloha). Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na $[a, b]$ a pro každé $x \in (a, b)$ existuje $f'(x)$. Nalezněte extrémy f na $[a, b]$.

Řešení. Protože je f spojitá na $[a, b]$, má f maximum i minimum. Dále ať

$$E = \{x \in (a, b), f'(x) = 0\} \cup \{a, b\}.$$

Extrémy mohou být jedině v E . Dále vypočteme funkční hodnoty prvků v E a podle toho určíme maximum a minimum.

5.2 Věty o střední hodnotě

Věta 49 (Rolle). Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Je-li $f(a) = f(b)$ a f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) , pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Podle věty 39 f nabývá v intervalu $[a, b]$ svého maxima i minima. Označme $m = \min f([a, b])$ a $M = \max f([a, b])$. Potom platí

$$m \leq f(a) = f(b) \leq M.$$

Pokud $m = M$, pak je f konstantní na $[a, b]$ a stačí volit $c \in (a, b)$ libovolně.

Pokud $m < M$, pak platí $m < f(a)$ nebo $f(a) < M$. Pokud $f(a) < M$, pak existuje $c \in [a, b]$ takové, že $f(c) = M$. Podle předpokladů věty a podle věty 48 máme $f'(c) = 0$. Pokud $m < f(a)$, postupujeme obdobně. $\square$

Věta 50 (Lagrange). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ a $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci. Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Definujme pomocnou funkci

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b].$$

Platí, že

- g je spojitá na $[a, b]$,
- $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a)$,
- $g'(x) = \underbrace{f'(x)}_{\in \mathbb{R}^*} - \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\in \mathbb{R}}, x \in (a, b)$.

Podle Rolleovy věty 49 nalezneme $c \in (a, b)$ takové, že $g'(c) = 0$. Potom platí

$$\underbrace{f'(c)}_{\in \mathbb{R}} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Odsud dostáváme

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

Věta 51 (Cauchy). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, f a g jsou funkce spojitě na $[a, b]$, f má v každém bodě $x \in (a, b)$ derivaci a g má v každém bodě $x \in (a, b)$ vlastní nenulovou derivaci. Potom $g(a) \neq g(b)$ a existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Důkaz. Podle Lagrangeovy věty 50 nalezneme $d \in (a, b)$ takové, že

$$g'(d) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Platí $g'(d) \neq 0$, a tedy $g(a) \neq g(b)$. Položme

$$\varphi(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)), \quad x \in [a, b].$$

Platí, že

- φ je spojitá na $[a, b]$,
- $\varphi(a) = 0, \varphi(b) = 0$,
- $\varphi'(x) = \underbrace{f'(x)}_{\in \mathbb{R}^*} \underbrace{(g(b) - g(a))}_{\neq 0} - (f(b) - f(a)) \underbrace{g'(x)}_{\in \mathbb{R}}, \quad x \in (a, b)$.

Podle Rolleovy věty 49 nalezneme $c \in (a, b)$ takové, že $\varphi'(c) = 0$, neboli

$$\underbrace{f'(c)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{(g(b) - g(a))}_{\neq 0} - (f(b) - f(a)) \underbrace{g'(c)}_{\neq 0} = 0.$$

Odtud plyne

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Věta 52 (l'Hôpitalovo pravidlo). *Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f, g jsou funkce, existuje*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

a platí buď

(a) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$, *nebo*

(b) $\lim_{x \rightarrow a^+} |g(x)| = \infty$.

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Důkaz. Provedeme důkaz (a), důkaz (b) umět nemusíme.

Označme $L = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Pomocné tvrzení.

(i) Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > L$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P^+(a, \delta) : \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha.$$

(ii) Pro každé $\beta \in \mathbb{R}, \beta < L$ existuje $\delta' > 0$ takové, že

$$\forall x \in P^+(a, \delta') : \frac{f(x)}{g(x)} > \beta.$$

Důkaz pomocného tvrzení.

(i) Nalezneme $r \in (L, \alpha)$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že platí

- f, f', g a g' jsou definovány na $P^+(a, \delta)$,
- f', g' jsou vlastní na $P^+(a, \delta)$,
- g' je nenulové na $P^+(a, \delta)$,
- $\forall x \in P^+(a, \delta) : \frac{f'(x)}{g'(x)} < r$,
- g je nenulová na $P^+(a, \delta)$; pokud by existoval nulový bod f v $P^+(a, \delta)$, pak je nejvýše jeden a δ vhodně zmenšíme.

Zvolme $x \in P^+(a, \delta)$. Předpokládejme, že $y \in P^+(a, \delta)$ a $y < x$. Podle Cauchyovy věty 51 nalezneme $c \in (y, x)$ takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}.$$

Potom $\frac{f'(c)}{g'(c)} < r$, a tedy

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r.$$

Potom máme, že

$$\lim_{y \rightarrow a^+} \underbrace{\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}}_{< r} = \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\substack{\neq 0 \\ \leq r}} < \alpha.$$

(ii) Dokážeme analogicky.

Vlastní důkaz. Pokud $L = \infty$, resp. $L = -\infty$, pak věta plyne z (ii), resp. z (i). Pokud $L \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, položíme $\alpha = L + \varepsilon$, $\beta = L - \varepsilon$ a nalezneme příslušná δ a δ' . Položme $\delta_1 = \min \{\delta, \delta'\}$. Pak pro každé $x \in P^+(a, \delta_1)$ platí

$$L - \varepsilon = \beta < \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha = L + \varepsilon, \quad \text{tj. } \frac{f(x)}{g(x)} \in B(L, \varepsilon),$$

což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka 42.

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{3x+1} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \sin x} = 1$, ale l'Hôpitalovým pravidlem výsledek nedostaneme

$$iii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$$

Příklad. Spočítejte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Řešení. L'Hôpitalovým pravidlem dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{1}{6}.$$

Věta 53 (Vztah derivace a monotonie). *Nechť f je spojitá na intervalu J a v každém vnitřním bodě J (množinu všech vnitřních bodů intervalu J označme jako $\text{int } J$) existuje derivace f .*

- (i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \text{int } J$, pak f je rostoucí na J .*
- (ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \text{int } J$, pak f je klesající na J .*
- (iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \text{int } J$, pak f je neklesající na J .*
- (iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \text{int } J$, pak f je nerostoucí na J .*

Důkaz. Dokážeme (i), ostatní případy se dokážou analogicky. Předpokládejme, že $x, y \in J$, $x < y$. Podle Lagrangeovy věty 50 nalezneme $c \in (x, y)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0.$$

Odtud plyne $f(x) < f(y)$. □

Poznámka 43 (Varování!). Věta 53 je formulovaná pro *interval*.

Věta 54. *Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$.*

Důkaz. Je vlastně

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Platí, že

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (f(x) - f(a)) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} (x - a) = 0.$$

Odtud z l'Hôpitalova pravidla dostáváme

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x).$$

□

Definice 56. Necht $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a f má vlastní n -tou derivaci na okolí bodu a . Potom $(n+1)$ -ní derivací funkce f v bodě a rozumíme

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

Poznámka 44. Derivace značíme

$$f' \quad f'' \quad f''' \quad f^{(4)} \quad f^{(5)} \quad \dots \quad f^{(n)}.$$

Věta 55. Necht $f'(a) = 0$, $f'' > 0$ (resp. $f'' < 0$). Potom f má v a lokální minimum (resp. lokální maximum).

Důkaz. Předpokládejme, že $f''(a) > 0$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že platí

$$\begin{aligned} \forall x \in B(a, \delta) : f'(x) \text{ existuje vlastní,} \\ \forall x \in P(a, \delta) : \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $\forall x \in (a - \delta, a)$ máme $f'(x) < 0$ a $\forall x \in (a, a + \delta)$ je $f'(x) > 0$. Funkce f je na $(a - \delta, a + \delta)$ spojitá, neboť má na $(a - \delta, a + \delta)$ vlastní derivaci. Potom je f klesající na $(a - \delta, a)$ podle věty 53. Podobně f je rostoucí na $(a, a + \delta)$. Odtud máme, že a je bodem lokálního minima f . Příklad $f''(a) < 0$ lze řešit obdobně. $\square$

Poznámka 45. Ve větě 55 je a dokonce bodem *ostrého* lokálního minima (resp. maxima).

5.3 Konvexní a konkávní funkce

Definice 57. Necht I je interval, f je funkce a $I \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f je

- **konvexní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

- **konkávní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

- **ryze konvexní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

- **ryze konkávní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Poznámka 46. f je [ryze] konvexní na I právě tehdy, když $-f$ je [ryze] konkávní na I .

Lemma 3 (Ekvivalentní podmínky pro konvexitu). Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

- (i) f je konvexní na I ,
- (ii) $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$,
- (iii) $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I : \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$,
- (iv) $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Důkaz. Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Nalezneme $\lambda \in (0, 1)$ takové, že $x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3$. Vyjde

$$\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}.$$

Označme $c = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_3)$. Platí

$$\frac{c - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - c}{x_3 - x_2} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}. \quad (8)$$

(i) $\implies$ (ii) Potom platí $c \geq f(x_2)$. Z (8) plyne

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

(ii) $\implies$ (i) Mějme $x_1, x_3 \in I$ a $\lambda \in (0, 1)$. BÚNO $x_1 < x_3$. Položme $x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3$. Máme, že

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{c - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

odkud plyne $c \geq f(x_2)$.

Ostatní implikace analogicky. □

Věta 56 (Konvexita a jednostranná derivace). Nechť f je konvexní funkce na nedegenerovaném intervalu I a $a \in I$.

(a) Je-li a vnitřní bod I , potom existují vlastní jednostranné derivace $f'_-(a)$, $f'_+(a)$, které splňují

$$f'_-(a) \leq f'_+(a).$$

(b) Je-li a pravý krajní bod I , pak $f'_-(a)$ existuje.

(c) Je-li a levý krajní bod I , pak $f'_+(a)$ existuje.

Důkaz. (a) Zvolme $b \in I, b < a$. Definujme pomocnou funkci

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in I, x > a.$$

Podle lemmatu 3 je φ na intervalu $\mathcal{D}(\varphi)$ neklesající. Pro každé $x \in I, x > a$ platí

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \varphi(x),$$

takže $\varphi(x)$ je zdola omezená na $\mathcal{D}(\varphi)$. Podle věty 35 existuje

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x)$$

vlastní, tj. $f'_+(a) \in \mathbb{R}$. Tvzení, že $f'_-(a) \in \mathbb{R}$ lze dokázat analogicky. Nerovnost $f'_-(a) \leq f'_+(a)$ plyne z následujícího.

$$\forall x, y \in I, x < a < y : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

Ostatní případy analogicky. □

Věta 57. *Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu J . Pak f je spojitá na J .*

Důkaz. Nechť $a \in J$. Potom a je vnitřním bodem J , a tedy $f'_+(a), f'_-(a) \in \mathbb{R}$. Podle jednostranných variant věty 44 dostáváme spojitost f v bodě a zprava a zleva, a tedy i spojitost v bodě a . □

Věta 58. *Nechť $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$ a f' je spojitá na (a, b) .*

- Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b) .
- Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b) .
- Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b) .
- Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konkávní na (a, b) .

Důkaz. Dokážeme tvrzení (iii), ostatní se potvrdí obdobně. Podle věty 53 je f' neklesající. Ověříme (iv) z lemmatu 3. Zvolme $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ tak, že $x_1 < x_2 < x_3$. Použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě 50 na f na intervalu $[x_1, x_2]$ a $[x_2, x_3]$. Podmínky Lagrangeovy věty jsou splněny, neboť f' existuje vlastní na (a, b) . Nalezneme $\xi \in (x_1, x_2)$ takové, že

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Dále nalezneme $\eta \in (x_2, x_3)$ takové, že

$$f'(\eta) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Platí, že $f'(\xi) \leq f'(\eta)$, neboť $\xi < \eta$. Máme tedy, že

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

Poznámka 47 (Varování!). Větu 58 používáme na *intervalu*.

Definice 58. Necht f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a **inflexi** nebo také že a je **inflexním bodem** funkce f , jestliže existuje vlastní $f'(a)$ a existuje $\delta > 0$ takové, že buď

$$\begin{aligned} \forall x \in P^-(a, \delta) : f(x) &> f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{a} \\ \forall x \in P^+(a, \delta) : f(x) &< f(a) + f'(a)(x - a), \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} \forall x \in P^-(a, \delta) : f(x) &< f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{a} \\ \forall x \in P^+(a, \delta) : f(x) &> f(a) + f'(a)(x - a). \end{aligned}$$

Věta 59 (Nutná podmínka inflexe). Necht f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f''(a)$ existuje a je různá od nuly. Potom a není inflexním bodem funkce f .

Důkaz. Předpokládejme, že $f''(a) > 0$. Definujme pomocnou funkci g předpisem

$$g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a), \quad x \in \mathcal{D}(f).$$

Platí, že

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - f'(a), \quad x \in \mathcal{D}(f), \\ g''(a) &= f''(a) > 0, \quad g'(a) = 0, \quad g(a) = 0. \end{aligned}$$

Podle věty 55 a poznámky 45 máme, že existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta) : g(x) > 0.$$

Z toho plyne, že a není inflexním bodem f . Pokud $f''(a) < 0$, postupujeme obdobně. $\square$

Věta 60 (Postačující podmínka pro inflexi). Necht funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) , $c \in (a, b)$ a platí

$$\forall x \in (a, c) : f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c, b) : f''(x) < 0,$$

nebo

$$\forall x \in (a, c) : f''(x) < 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c, b) : f''(x) > 0.$$

Pak c je inflexním bodem funkce f .

Důkaz. Uvažujme první možnost, druhá se dokáže analogicky. Definujme

$$g(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c), \quad x \in (a, b).$$

Pak

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - f'(c), \quad x \in (a, b), \\ g''(x) &= f''(x), \quad x \in (a, c) \cup (c, b). \end{aligned}$$

Funkce g' je spojitá na $(a, c]$ a pro každé $x \in (a, c)$ máme $g''(x) > 0$. Podle věty 53 je g' rostoucí na $(a, c]$. Podobně g' je klesající na $[c, b)$. Platí $g'(c) = 0$. Opět podle věty 53 dostaneme, že g je klesající na (a, b) , neboť

$$\begin{aligned} \forall x \in (a, c) : g'(x) &< 0, \\ \forall x \in (c, b) : g'(x) &< 0 \end{aligned}$$

a g je spojitá na intervalu (a, b) , neboť zde má vlastní derivaci. Platí $g(c) = 0$, a proto

$$\begin{aligned} \forall x \in (a, c) : g(x) &> 0, \\ \forall x \in (c, b) : g(x) &< 0, \end{aligned}$$

a tedy graf přechází z jedné strany na druhou, což jsme chtěli dokázat. $\square$

5.4 Průběh funkce

Definice 59. Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, je **asymptotou funkce f** v ∞ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0, \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0).$$

Věta 61. Funkce f má v ∞ asymptotu $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ právě když

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}.$$

Důkaz.

$\Rightarrow$ Počítejme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x) - ax - b}{x} + \frac{ax + b}{x} \right) = \frac{0}{\infty} + a = a.$$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b + b) = 0 + b = b.$$

$\Leftarrow$ Platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = b - b = 0.$$

□

Příklad.

(1) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}, x \in \mathbb{R}$

Asymptotu spočítáme jako

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

Pak dopočteme b jako

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3}) = \dots = \frac{1}{3}.$$

Funkce $f(x)$ má tedy asymptotu $x \mapsto x + \frac{1}{3}$.

(2) $f(x) = e^x$ nemá asymptotu, neboť

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

Kapitola 6

Taylorův polynom

Motivace. Máme-li funkci f , která má v bodě a vlastní derivaci, pak je tečna

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Podíváme-li se na limitu

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} = 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a},$$

zjistíme, že aproximuje chování funkce.

6.1 Základní vlastnosti

Definice 60. Necht f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x - a)^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

nazýváme **Taylorovým polynomem** řádu n funkce f v bodě a .

Poznámka 48.

$$(1) \text{ st } (T_n^{f,a}) \leq n$$

$$(2) \text{ } T := T_n^{f,a}, \text{ pak } T(a) = f(a),$$

$$T'(a) = f'(a) + f''(a)(x - a) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a)(x - a)^{n-1} = T_{n-1}^{f',a}(a) = f'(a)$$

$$T''(a) = f''(a) \quad \dots \quad T^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

Poznámka 49. Idea: Chceme, aby $T^{(n)}(x) = f^{(n)}(a)$. Cíl: Studovat aproximační vlastnosti T , odhady chyby $|f - T|$ apod.

Lemma 4. *Nechť Q je polynom, $\deg Q \leq n$ a*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Pak Q je nulový polynom.

Důkaz. Nutně $Q(a) = 0$. Předpokládejme, že $Q \neq 0$. Potom existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ a polynom R tak, že

$$Q(x) = (x-a)^k R(x) \wedge R(a) \neq 0.$$

Potom

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-k}}.$$

Avšak tato limita

$$\begin{cases} \text{neexistuje} & k < n \wedge (n-k) \text{ liché,} \\ \text{je nevlastní} & k < n \wedge (n-k) \text{ sudé,} \\ \text{je vlastní a nenulová} & k = n, \end{cases}$$

což je spor v každém případě. □

Věta 62 (Peanův tvar zbytku). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ a P je polynom stupně nejvýše n . Pak*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \iff P = T_n^{f,a}.$$

Důkaz.

$\Leftarrow$ Matematickou indukcí máme

1. $n = 1$: Máme

$$T_1^{f,a} = f(a) + f'(a)(x-a) = t(x),$$

a tedy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - t(x)}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))'}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0. \end{aligned}$$

2. $n-1 \rightsquigarrow n$: Předpokládejme, že platí pro $n-1$. Jest

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n},$$

f je spojitá (má vlastní derivaci), T je spojitý, tedy

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - T_n^{f,a}(x)) = f(a) - T_n^{f,a}(a) = f(a) - f(a) = 0,$$

Taylorův polynom

a proto je limita typu $\frac{0}{0}$. Pak můžeme použít L'Hôpitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = 0$$

dle indukčního předpokladu.

$\Rightarrow$ Jest

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x) + T_n^{f,a}(x) - P(x)}{(x-a)^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} + \frac{T_n^{f,a}(x) - P(x)}{(x-a)^n} \right). \end{aligned}$$

Dále jest

$$\frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

dle již dokázané implikace a

$$\frac{T_n^{f,a}(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0$$

dle věty o aritmetice limit, neboť

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{T_n^{f,a}(x) - P(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\underbrace{\frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n}}_{=0 \text{ z předpokladu}} - \underbrace{\frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}}_{=0 \text{ z již dokázaného}} \right) = 0,$$

a tedy podle lemmatu 4 je

$$T_n^{f,a}(x) - P(x) = 0,$$

čili $P(x) = T_n^{f,a}(x)$. □

Věta 63. *Nechť $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$. Předpokládejme, že:*

- *f je funkce, která má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$ -ní derivaci,*
- *φ je spojitá funkce na $[a, x]$, která má v každém bodě intervalu (a, x) vlastní nenulovou derivaci.*

Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi) (x - \xi)^n.$$

Důkaz. Idea: Cauchyho věta $\frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$, F definujeme (trik)

Položme

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + f'(t)(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right), \quad t \in [a, x].$$

Pak

- $F : [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$, F je spojitá na $[a, x]$,
- $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$,
- $F(x) = 0$,
- F má vlastní derivaci v každém bodě (a, x) .

Tedy lze použít Cauchyovu větu 51. Máme tedy, že existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$\frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Dále jest

$$F'(t) = - \left(f'(t) - f'(t) + f''(x-t) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \right),$$

tedy $F'(\xi) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n$. Dosadíme:

$$\frac{0 - (f(x) - T_n^{f,a}(x))}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{-\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{\varphi'(\xi)}.$$

Odtud plyne

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} \cdot \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka 50. (a) Věta platí i pro $x < a$, důkaz je stejný.

(b) O f stačí předpokládat, že $f^{(n)}$ je spojitá na $[a, x]$ a $f^{(n+1)}$ existuje na (a, x) (vlastní či nevlastní).

Věta 64 (Lagrangeův tvar zbytku). *Nechť a, x, f jsou jako ve větě 63. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Důkaz. Ve větě 63 položíme $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$. Potom φ je spojitá na $[a, x]$, má vlastní a nenulovou derivaci $(n+1)(x-t)^n$ na (a, x) . Tedy dle věty 63 najdeme $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{0 - (x-a)^{n+1}}{-(n+1)(x-\xi)^n} \cdot f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

□

Věta 65 (Cauchyův tvar zbytku). *Nechť a, x, f jsou jako ve větě 63. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n(x - a).$$

Důkaz. Použijeme větu 63 pro funkci $\varphi(t) = t, t \in \mathbb{R}$. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{x - a}{1} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

□

6.2 Symbol malé o

Definice 61. Nechť f, g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f je v bodě a **malé o od g** (píšeme $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$), jestliže platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Poznámka 51. (1) Podobně můžeme definovat i jednostranné verze: $x \rightarrow a+$ nebo $x \rightarrow a-$.

(2) Zápis $f(x) = h(x) + o(g(x)), x \rightarrow a$ znamená jednak

$$f(x) - h(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a,$$

ekvivalentně

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - h(x)}{g(x)} = 0;$$

a také

$$f(x) = h(x) + \omega(x), \text{ kde } \omega(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a.$$

Věta 66. *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.*

(i) *Jestliže*

$$f_1(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a \qquad a \qquad f_2(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a,$$

potom

$$f_1(x) + f_2(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a.$$

(ii) *Jestliže*

$$f_1(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a \qquad a \qquad f_2(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a,$$

potom

$$f_1(x)f_2(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a.$$

(iii) Jestliže

$$f(x) = o(g_1(x)), \quad x \rightarrow a \quad a \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbb{R},$$

potom

$$f(x) = o(g_2(x)), \quad x \rightarrow a.$$

Důkaz.

(i) Je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g(x)} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_2(x)}{g(x)} = 0 + 0 = 0.$$

(ii) Je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)f_2(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_2(x)}{g(x)} = 0 \cdot 0 = 0.$$

(iii) Je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g_1(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = 0 \cdot L = 0.$$

□

Věta 67. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $f(y) = o(g(y))$, $y \rightarrow b$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$ a existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta) : \varphi(x) \neq b.$$

Pak $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x)))$, $x \rightarrow a$.

Důkaz. Chceme spočítat

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(\varphi(x))}{g(\varphi(x))} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} \circ \varphi(x) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f}{g}(y) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b,$$

φ splňuje podmínku (P) v bodě a .

□

Poznámka 52. Věta 62 dává

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a$$

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a$$

Taylorův polynom

Příklad. Počítejme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Je však

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Máme tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Poznámka 53. Platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0.$$

Kapitola 7

Číselné řady

7.1 Základní pojmy

Definice 62. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost.

- (a) Pro $m \in \mathbb{N}$ položme $s_m = \sum_{n=1}^m a_n$. **Součet řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je limita posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje.
- (b) Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje (je konvergentní)**, je-li $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m$ vlastní. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje (je divergentní)**, jestliže $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní. Pro jemnější rozlišení budeme někdy říkat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje k ∞** , respektive **diverguje k $-\infty$** , jestliže $\lim s_m = \infty$, resp. $\lim s_m = -\infty$.
- (c) Číslo $a_n, n \in \mathbb{N}$ je **n -tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a číslo $s_m, m \in \mathbb{N}$ je jejím **m -tým částečným součtem**.

Poznámka 54. Nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{má součet} & \begin{cases} \text{konverguje} \\ \text{diverguje} \end{cases} \\ \text{nemá součet.} \end{cases} \begin{cases} \text{k } \infty, \\ \text{k } -\infty \end{cases}$$

Příklad.

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ nemá součet (diverguje)
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konverguje $\iff q \in (-1, 1)$, je totiž

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \begin{cases} \frac{q^n - 1}{q - 1}, & q \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ n, & q = 1. \end{cases}$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, neboť

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$s_m = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) = 1 - \frac{1}{m+1}.$$

Věta 68 (Nutná podmínka konvergence řady). *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak platí $\lim a_n = 0$.*

Důkaz. Označme $x_n = \sum_{j=1}^n a_j$. Počítáme

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}).$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Odtud máme

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

□

Věta 69 (Bolzanova–Cauchyova podmínka konvergence řady). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní,

(ii) platí výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. At je $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$.

⇐ Platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0 : |s_m - s_{n-1}| < \varepsilon. \quad (9)$$

Ověříme BC-podmínku pro posloupnost $\{s_m\}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle (9) nalezneme k ε příslušné $n_0 \in \mathbb{N}$. Zvolme libovolně $m_1, n_1 \in \mathbb{N}, m_1 \geq n_0, n_1 \geq n_0$. Rozlišíme následující možnosti:

(i) $m_1 > n_1$: $|s_{m_1} - s_{n_1}| < \varepsilon$, neboť $m_1 \geq n_1 + 1 \geq n_0$,

(ii) $m_1 = n_1$: $|s_{m_1} - s_{n_1}| = 0 < \varepsilon$,

(iii) $m_1 < n_1$: $|s_{m_1} - s_{n_1}| = |s_{n_1} - s_{m_1}| < \varepsilon$, neboť $n_1 \geq m_1 + 1 \geq n_0$.

Máme tedy že $\{a_n\}$ splňuje BC-podmínku, tedy $\{s_n\}$ je konvergentní, a proto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

⇒ Protože $\sum a_n$ konverguje, splňuje $\{s_n\}$ BC-podmínku, odkud plyne (ii). □

Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (harmonická řada) je divergentní.

Vezměme

$$s_{2n} - s_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}}_{n \text{ členů}} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nesplňuje BC-podmínku, a tedy diverguje (k nekonečnu). Zároveň je to protipříklad na opačnou implikaci ve větě 68.

Poznámka 55. Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \log n \right) = \gamma \in \mathbb{R}$. Konstantě γ říkáme Eulerova-Mascheroniho konstanta.

Věta 70. Necht řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mají součet.

(a) Necht $\alpha \in \mathbb{R}$ a výraz $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je definován. Potom má řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ součet a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(b) Necht je výraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ definován. Potom má řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ součet a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Důkaz.

(a) Označme $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$, $\sigma_n = \sum_{j=1}^n \alpha a_j$. Platí $\sigma_n = \alpha s_n$. Platí $\lim s_n = s \in \mathbb{R}^*$. Podle předpokladu je výraz definován, takže $\lim \sigma_n = \lim \alpha s_n$, tedy $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha a_j = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

(b) Označme $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$, $\sigma_n = \sum_{j=1}^n b_j$. Pak je $t_n = \sum_{j=1}^n (s_n + \sigma_n)$. Pak $\lim t_n = \lim (s_n + \sigma_n) = s + \sigma$, neboť tento výraz je definován. $\square$

7.2 Řady s nezápornými členy

Věta 71. Necht je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy. Pak má $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ součet.

Důkaz. Poněvadž pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$, je posloupnost $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ neklesající. Odtud máme podle věty 21, že $\lim_{j \rightarrow \infty} s_j \in \mathbb{R}^*$. $\square$

Věta 72 (Srovnávací kritérium). Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je řada s kladnými členy a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$.

(a) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, pak je i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, pak je i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.

Důkaz.

(a) Máme

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n, \quad n > n_0$$

$$t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n_0} + b_{n_0+1} + \cdots + b_n.$$

Platí

$$s_n \leq s_{n_0-1} + t_n - t_{n_0-1} = t_n + s_{n_0-1} - t_{n_0-1}.$$

Dále platí $\lim s_n = s \in \mathbb{R}^*$ a $\lim t_n = t \in \mathbb{R}^*$ podle věty 71. Potom $s \leq t + s_{n_0-1} - t_{n_0-1}$. Podle předpokladu je $t \in \mathbb{R}$, takže celá pravá strana je prvkem $\mathbb{R}$, a tedy $s \in \mathbb{R}$, neboť všechny členy jsou nezáporné.

(b) Plyne z (a) obměnou, což jsme již dokázali. $\square$

Věta 73 (Limitní srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je řada s kladnými členy a $\lim \frac{a_n}{b_n}$ existuje. Označme $A = \lim \frac{a_n}{b_n}$.*

(a) *Nechť $A \in (0, \infty)$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

(b) *Nechť $A = 0$. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

(c) *Nechť $A = \infty$. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Důkaz.

(a) $\implies$ Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \frac{a_n}{b_n} > \frac{1}{2}A,$$

tedy že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > \frac{1}{2}Ab_n.$$

Věta 72 dává, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}Ab_n \right)$$

konverguje. Dále podle věty 70(a) máme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

konverguje.

$\Leftarrow$ Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geq n_0 : \frac{a_n}{b_n} < 2A.$$

Potom máme

$$\forall n \geq n_0 : a_n < 2Ab_n.$$

Protože $\sum b_n$ konverguje, konverguje i $\sum 2Ab_n$ podle věty 70. Odtud podle věty 72 dostáváme, že konverguje i $\sum a_n$.

(b) Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geq n_0 : \frac{a_n}{b_n} < 1.$$

Odtud máme

$$\forall n \geq n_0 : a_n < b_n.$$

Protože $\sum b_n$ konverguje, konverguje podle věty 72 i $\sum a_n$.

(c) Obdobně. □

Příklad.

(1) $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^2+3n}$

Zvolme $b_n = \frac{1}{n}$. Z limitního srovnávacího kritéria dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n\sqrt{n}}{n^2 + 3n} = 1 \in (0, \infty),$$

a tedy $\sum a_n$ diverguje, neboť $\sum \frac{1}{n}$ diverguje.

(2) $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Zvolme $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$, přičemž $\sum b_n = 1$. Pak máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1 \in (0, \infty),$$

takže $\sum a_n$ konverguje, neboť $\sum b_n$ konverguje.

Věta 74 (Cauchyovo odmocninové kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.*

(a) *Jestliže platí*

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) *Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*

(c) *Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*

(d) *Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.*

(e) *Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.*

Důkaz.

(a) Platí

$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq a_n \leq \underbrace{q^n}_{b_n}.$$

Číselné řady

Protože je $\sum b_n$ konvergentní, podle věty 72 dostáváme, že $\sum a_n$ je konvergentní.

(b) Nalezneme $q \in (\limsup \sqrt[n]{a_n}, 1)$. Potom nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sup \{ \sqrt[n]{a_n}, n \geq n_0 \} < q.$$

Odsud plyne

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q.$$

Z (a) plyne, že $\sum a_n$ konverguje.

(c) $\limsup a_n = \lim a_n$, a tedy můžeme použít (b).

(d) Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1.$$

Nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall k \geq k_0 : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1.$$

Zároveň tedy platí

$$\forall k \geq k_0 : a_{n_k} > 1.$$

Neplatí tedy, že $\lim a_{n_k} = 0$, a tedy neplatí, že $\lim a_n = 0$. Proto podle věty 68 $\sum a_n$ diverguje.

(e) Je $\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n} > 1$. Dále použitím (d). □

Poznámka 56. Pokud $\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1$, pak nelze z této informace odvodit ani konvergenci, ani divergenci. Například řada $\sum \frac{1}{n}$ diverguje, přičemž $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$. Naopak řada $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje, přičemž $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Věta 75 (D'Alembertovo podílové kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.*

(a) *Jestliže platí*

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) *Jestliže $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*

(c) *Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*

(d) *Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak neplatí $\lim a_n = 0$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

Důkaz. (a) Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$a_n \leq a_{n_0} q^{n-n_0}.$$

Použijeme matematickou indukci.

- $n = n_0$: Platí.
- $n \rightsquigarrow n + 1$: Je

$$a_{n+1} \leq qa_n \leq qa_{n_0}q^{n-n_0} = a_{n_0}q^{(n+1)-n_0}.$$

Protože $\sum a_{n_0}a^{n-n_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n_0}q^{-n_0+1}q^{n-1}$ konverguje, konverguje i $\sum a_n$ podle věty 72.

(b) Nalezneme $q \in \left(\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}, 1\right)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\sup \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n}, n \geq n_0 \right\} < q \in (0, 1).$$

Potom

$$\forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q.$$

Z již dokázané části (a) pak vyplývá, že $\sum a_n$ je konvergentní.

(c) Je $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, dále podle (b).

(d) Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

neboli

$$\forall n \geq n_0 : a_{n+1} > a_n.$$

Odsud plyne, že

$$\forall n \geq n_0 : a_n \geq a_{n_0} > 0.$$

Tedy neplatí, že $\lim a_n = 0$, a proto $\sum a_n$ není konvergentní podle věty 68. $\square$

Věta 76 (Kondenzační kritérium). *Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost s nezápornými členy. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.*

Důkaz. Označme

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ t_k &= a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Pro $n \leq 2^k$ platí

$$\begin{aligned} s_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^k}) \\ &= a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k} = t_k. \end{aligned} \tag{10}$$

Pokud $n \geq 2^k$, platí

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + a_{2^k}) \\ &\leq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^k a_{2^k}) = \frac{1}{2} \cdot t_k. \end{aligned} \quad (11)$$

$\Rightarrow$ Máme, že $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$, neboť $\sum a_n$ konverguje. Pro každé n, k splňující $n \geq 2^k$ platí podle (11) $t_k \leq 2s_n \leq 2s$. Odsud máme, že $\lim t_k \in \mathbb{R}$, neboť $\sum 2^k a_{2^k}$ je konvergentní

$\Leftarrow$ Podle předpokladu $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t \in \mathbb{R}$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}, n \leq 2^k$ platí (11), tedy $s_n \leq t_k \leq t$. Odtud plyne $\lim s_n \leq t$. Proto je $\sum a_n$ konvergentní. $\square$

Věta 77.

Důkaz. Rozlišíme dva případy.

(i) $\alpha > 1$: Použijeme větu 76. Místo řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ vyšetřujeme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{k\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^k)^{1-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k,$$

která konverguje, neboť $2^{1-\alpha} < 1$; proto konverguje i původní řada.

(ii) $\alpha \leq 1$: Platí

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \geq 0.$$

Řada $\sum \frac{1}{n}$ diverguje, a tedy máme podle srovnávacího kritéria 72, že i řada $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverguje. $\square$

7.3 Řady s obecnými členy

Věta 78 (Leibniz).

Důkaz. BÚNO $\{a_n\}$ je nerostoucí. Potom

$$\lim a_n = \inf \{a_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Z předpokladu víme, že $\lim a_n = 0$, a tedy $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$. Pak je

$$s_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \cdots + (-1)^n a_n.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2n} = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{\leq 0} + \underbrace{(-a_3 + a_4)}_{\leq 0} + \cdots + \underbrace{(-a_{2n-1} + a_{2n})}_{\leq 0},$$

$$s_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{(-a_{2n+1} + a_{2n+2})}_{\leq 0} \leq s_{2n}.$$

Dále platí

$$s_{2n} = -a_1 + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\leq 0} + \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\leq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n-2} + a_{2n-1})}_{\leq 0} + a_{2n} \geq -a_1,$$

odkud máme, že $\lim s_{2n} = s \in \mathbb{R}$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1}.$$

Potom

$$\lim s_{2n+1} = \lim(s_{2n} - a_{2n+1}) = s - 0 = s.$$

Chceme dokázat, že $\lim s_n = s$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_1 : |s_{2k} - s| < \varepsilon.$$

Podobně

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_2 : |s_{2k+1} - s| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max\{2k_1, 2k_2 + 1\}$. Vezměme $n \geq n_0$. Pokud je n sudé, je $n = 2k$ a $k \geq k_1$.

Pak platí

$$|s_n - s| = |s_{2k} - s| < \varepsilon.$$

Pokud je n liché, je $n = 2k + 1$, $k \geq k_2$. Pak platí

$$|s_n - s| = |s_{2k+1} - s| < \varepsilon.$$

□

Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konverguje.

7.4 Absolutní konvergence řad

Definice 63.

Věta 79.

Důkaz. Použijeme větu 69, tj. ověříme BC-podmínku pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože $\sum |a_n|$ konverguje, platí

$$\exists n_0 \forall m \geq n \geq n_0 : \left| \sum_{j=n}^m |a_j| \right| < \varepsilon.$$

Pro každé $m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0$ platí

$$\left| \sum_{j=n}^m a_j \right| \leq \sum_{j=n}^m |a_j| < \varepsilon$$

díky trojúhelníkové nerovnosti. Odtud máme podle věty 69, že $\sum a_n$ konverguje.

Označme

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ \sigma_n &= |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|. \end{aligned}$$

Potom $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$ a $\lim \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}$ a platí

$$\forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq \sigma_n,$$

odkud máme, že $s \leq \sigma$. □

Poznámka 57. Někdy je možné ukázat konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tako, že ukážeme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, což je řada s nezápornými členy.

7.5 Přerovnání řad

Definice 64.

Věta 80.

Důkaz.

(1) Předpokládejme nejprve, že $\sum a_n$ má nezáporné členy. Pro každé n platí

$$a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(n)} \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_m \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j,$$

pokud $m \geq \max \{ \pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n) \}$. Odtud plyne

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Protože je $\sum a_j$ konvergentní, je taky $\sum a_{\pi(k)}$ konvergentní. Poněvadž $\sum a_j$ je přerovná-

ním řady $\sum a_{\pi(k)}$, dostáváme podle předchozího

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} \geq \sum_{j=1}^{\infty} a_j,$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

- (2) Obecný případ. Pro $a \in \mathbb{R}$ budeme značit $a^+ = \max\{a, 0\}$. Obdobně $a^- = \max\{-a, 0\}$. Platí $a = a^+ - a^-$, $0 \leq a^+ \leq |a|$ a konečně $0 \leq a^- \leq |a|$.

Máme-li $\sum a_n$ absolutně konvergentní řadu, je i $\sum |a_n|$ konvergentní. Dostáváme, že $\sum a_n^+$ a $\sum a_n^-$ jsou konvergentní řady s nezápornými členy. Podle bodu (1) máme

$$\begin{aligned} \sum a_{\pi(n)}^+ &= \sum a_n^+, \\ \sum a_{\pi(n)}^- &= \sum a_n^-. \end{aligned}$$

Dále je

$$\sum a_{\pi(n)} = \sum (a_{\pi(n)}^+ - a_{\pi(n)}^-) = \sum a_{\pi(n)}^+ - \sum a_{\pi(n)}^-$$

podle věty 70. Dále je

$$= \sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum (a_n^+ - a_n^-) = \sum a_n,$$

čímž je důkaz u konce. □

Věta 81 (Riemann).

Důkaz. Hlavní myšlenka důkazu. Označme

$$P = \{n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0\}, Q = \{n \in \mathbb{N}, a_n < 0\}.$$

Pak je $\mathbb{N} = P \cup Q$ a taky $P \cap Q = \emptyset$. Množiny P a Q jsou nekonečné (kdyby nějaká z nich byla konečná, řada by byla absolutně konvergentní). Nalezneme posloupnosti přirozených čísel $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že jsou prosté a $P = \{p_n, n \in \mathbb{N}\}$, $Q = \{q_n, n \in \mathbb{N}\}$. Dále je $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = \infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{q_n} = -\infty$, jinak by řada nebyla neabsolutně konvergentní. Bereme členy z P , dokud částečný součet není větší než s . Pak beru z Q , dokud částečný součet není menší než s , a tak podobně. Platí $\lim a_n = 0$, neboť $\sum a_n$ je konvergentní řada. Proto částečné součty konvergují k s . Pro $s = \infty$ začneme s hranicí 1, pak zařadíme záporný člen, pak máme hranici 2, a tak podobně. □

7.6 Součin řad

Definice 65.

Věta 82 (Mertens).

Důkaz. Označme

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=1}^n a_i, & A &= \sum_{n=1}^{\infty}, & \alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \\ B_m &= \sum_{i=1}^m b_i, & B &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n, & \beta_n &= B_n - B, \\ C_n &= \sum_{i=1}^n, \quad c_i = \sum_{j=1}^i a_{i+1-j} b_j. \end{aligned}$$

Je

$$\begin{aligned} C_n &= \underbrace{(a_1 b_1)}_{c_1} + \underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1)}_{c_2} + \cdots + \underbrace{(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1)}_{c_n} \\ &= a_1(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a_2(b_1 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_n b_1 \\ &= a_1(B + \beta_n) + a_2(B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B + \beta_1) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)B + (a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_1)_{\gamma_n} \\ &= A_n B + \gamma_n. \end{aligned}$$

Chceme, že $\lim C_n = A \cdot B$. Stačí ukázat, že $\lim \gamma_n = 0$, neboť $\lim A_n = A$ a

$$\lim C_n = \lim(A_n B + \gamma_n) = A \cdot B + 0 = A \cdot B.$$

Budeme dokazovat $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$. Víme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0. \quad (12)$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky (12) nalezneme $N \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geq N : |\beta_n| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $n \geq N$ platí

$$\gamma_n = (a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \cdots + a_{n+1-N} \beta_N) + (a_{n+2-N} \beta_{N-1} + \cdots + a_n \beta_1).$$

Odhadneme $|\gamma_n|$ jako

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq (|a_1| \cdot \underbrace{|\beta_n|}_{< \varepsilon} + \cdots + |a_{n+1-N}| \cdot \underbrace{|\beta_N|}_{< \varepsilon}) + |a_{n+2-N} \beta_{N-1} + \cdots + a_n \beta_1| \\ &\leq \alpha \varepsilon + |a_{n+2-N} \beta_{N-1} + \cdots + a_n \beta_1|. \end{aligned}$$

Poněvadž $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$, dostáváme, že

$$0 \leq \limsup |\gamma_n| \leq \alpha \cdot \varepsilon,$$

a proto $\limsup |\gamma_n| = 0$. Dále platí

$$0 \leq \liminf |\gamma_n| \leq \limsup |\gamma_n| = 0,$$

a tedy $\liminf |\gamma_n| = 0$ a taky $\lim \gamma_n = 0$. □

Příklad. Řada

$$c_k \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{a_n=b_n}$$

konverguje podle Leibnitzova kritéria, neboť $\frac{1}{\sqrt{n}}$ konverguje. Řada

$$c_k \sum_{i=1}^k a_{k+1-i} b_i = \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{k+i-1}}{\sqrt{k+1-i}} \cdot \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}} = (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}},$$

díky AG nerovnosti máme

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}} \geq \frac{1}{\frac{(k+1-i)+i}{2}} = \frac{2}{k+1},$$

a tedy i

$$c_k \geq \frac{2}{k+1},$$

a proto $\sum c_k$ diverguje, neboť není splněna nutná podmínka konvergence.

Věta 83 (Abel).

7.7 Taylorovy řady elementárních funkcí

Definice 66.

Exponenciální funkce. Použijeme Lagrangeův tvar zbytku (věta 64). Máme funkce $f(x) = \exp(x)$ v bodě $a = 0$. Uvažujme $x \neq a$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme podle věty 64 bod ξ_n mezi 0 a x splňující

$$f(x) - T_n^{f,a} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_n) x^{n+1}.$$

Potom

$$|f(x) - T_n^{f,0}(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} e^{|x|}$$

jde pro $n \rightarrow \infty$ k nule. Tedy

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{f,0}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} x^j = \boxed{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j}.$$

Odtud plyne pro $x = 1$:

$$e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}.$$

Logaritmická funkce. Opět použijeme Lagrangeovu větu. Máme $f(x) = \log(1+x)$, $x \in (0, 1]$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme podle věty 64 $\xi_n \in (0, x)$ splňující

$$|f(x) - T_n^{f,0}(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_n) x^{n+1} \right|.$$

Je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f'''(x) &= (-1)(-2) \frac{1}{(1+x)^3} \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)(-2) \dots (-(n-1)) \frac{1}{(1+x)^n} = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{(1+x)^n}. \end{aligned}$$

Přepíšeme tedy původní výraz

$$= \left| \frac{1}{(n+1)!} (-1)^n n! \frac{1}{(1+\xi_n)^{n+1}} x^{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1},$$

a tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{f,0}(x) = f(x).$$

Dále ať je $x \in (-1, 0)$. Podle věty 65 nalezneme $\xi_n \in (x, 0)$ splňující

$$\begin{aligned} |f(x) - T_n^{f,0}(x)| &= \left| \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_n) (x - \xi_n)^n x \right| \\ &= \left| \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{1}{(1+\xi_n)^{n+1}} (x - \xi_n)^n x \right| = \left| \left(\frac{x - \xi_n}{1 + \xi_n} \right)^n \frac{x}{1 + \xi_n} \right|, \end{aligned}$$

ale

$$\begin{aligned} \frac{\xi_n - x}{1 + \xi_n} &\leq -x, \quad \text{neboť} \\ \xi_n - x &\leq -x - x\xi_n \\ \xi_n(1+x) &= \xi_n + x\xi_n \leq 0. \end{aligned}$$

Původní výraz je tedy roven

$$= \left(\frac{\xi_n - x}{1 + \xi_n} \right)^n \frac{|x|}{1 - |x|} \leq \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|},$$

což pro $n \rightarrow \infty$ konverguje k nule.

Odtud plyne pro $x = 1$:

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Funkce sinus. Máme $f(x) = \sin x$. Vezměme $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme ξ_n mezi 0 a x splňující

$$f(x) - T_n^{f,0}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_n) x^{n+1}.$$

Pak máme

$$|f(x) - T_n^{f,0}(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1},$$

což pro $n \rightarrow \infty$ jde k nule.

7.8 Posloupnosti a řady s komplexními členy

Definice 67.

Poznámka 58.

- (1) $\{a_n\}$ konverguje k z právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - z| = 0$.
- (2) Limita posloupnosti $\{a_n\}$ je určena jednoznačně. Kdyby $\{a_n\}$ konvergovala k z_1 a z_2 , je

$$|z_1 - z_2| \leq \underbrace{|z_1 - a_n|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|a_n - z_2|}_{\rightarrow 0},$$

odkud máme $z_1 = z_2$.

- (3) Platí věta o aritmetice limit.
- (4) $\lim a_n = z \iff (\lim \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} z \wedge \lim \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} z)$.

Definice 68.

Definice 69.

Věta 84.

Definice 70.

Kapitola 8

Primitivní funkce

8.1 Základní vlastnosti

Definice 71.

Poznámka 59.

- (1) Existují funkce, které nemají funkci primitivní, např. na $\mathbb{R}$.
- (2) Je-li funkce F primitivní k funkci f na I , potom F je spojitá na I .
- (3) Hledání primitivní funkce označujeme jako **integraci**. Primitivní funkci někdy říkáme **neurčitý integrál**.
- (4) Je-li F primitivní k f na I , potom $F + c$, kde $c \in \mathbb{R}$, je také primitivní k f na I .

Věta 85.

Důkaz. Položme

$$H(x) = F(x) - G(x), \quad x \in I.$$

Potom pro každé $x \in I$ platí

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Odtud máme, že $H(x)$ je konstantní na I . □

Označení.

Tabulkové integrály.

Věta 86.

Věta 87.

Důkaz. Obě rovnosti dokážeme zvlášť.

- První rovnost

$\subseteq$ Označme $H \in \int (f + g)$, Zvolme $F \in \int f, G \in \int g$. Pak je

$$H = (H - F - G) + F + G, \quad \text{a}$$

$$(H - F - G)' + F' = f + g - f - g + f = f.$$

$\supseteq$ Označme $H \in \int f + \int g$. Je

$$H = F_1 + G_1, \quad F_1 \in \int f, \quad G_1 \in \int g$$

$$H' = F_1' + G_1' = f + g,$$

a tedy $(H - F - G) + F \in \int f$ a $G \in \int g$.

- Druhá rovnost

$\subseteq$ Vezměme $H \in \int \alpha f$. Pak je $H = \alpha \frac{1}{\alpha} H$, a tedy

$$\left(\frac{1}{\alpha} H \right)' = \frac{1}{\alpha} \alpha f = f,$$

a proto $\frac{1}{\alpha} H \in \int f$.

$\supseteq$ Vezměme $F \in \int f$. Pak je

$$(\alpha F)' = \alpha f \in \int \alpha f.$$

□

Věta 88 (Integrace per partes).

Důkaz. Dokážeme dvě inkluze.

$\subseteq$ Funkce f i G jsou spojité na I . Proto je i fG spojitá a podle věty 87 má primitivní funkci, označme ji L , je tedy $L \in \int fG$. Je

$$L = FG - FG + L = FG - (FG - L).$$

Chceme ověřit, že $(FG - L) \in \int Fg$. Počítáme

$$(FG - L)' = F'G + FG' - L' = fG + Fg - fG = Fg,$$

což jsme chtěli dokázat.

$\supseteq$ Již víme, že Fg má primitivní funkci na I . Vezměme si $U \in \int Fg$. Chceme dokázat,

že $FG - U \in \int fG$. Je

$$(FG - U)' = F'G + FG' - U' = fG + Fg - Fg = fG,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Příklad.

(1) Najděte $\int \log x \, dx$.

Funkci přepíšeme jako $\int 1 \cdot \log x \, dx$. Pak je

$$\int 1 \cdot \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \log x - \int 1 \, dx \stackrel{c}{=} x \log x - x, \quad x \in (0, \infty).$$

(2) Najděte $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

Označme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx$. Pak je

$$\begin{aligned} I_n &= \int \underbrace{1}_f \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^n}}_G \, dx = \underbrace{x}_F \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^n}}_G - \int \underbrace{x}_F \underbrace{(-n) \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} 2x \, dx}_g \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \left(\int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx \right) \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \left(\int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx \right) \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1} \end{aligned}$$

a po vyjádření máme

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n \\ I_1 &= \int \frac{1}{1+x^2} \, dx \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R} \\ &\dots \end{aligned}$$

(3) Najděte $\int x \sin x \, dx$.

Je

$$\begin{aligned}\int \underbrace{e^x}_f \underbrace{\sin x}_G dx &= \underbrace{e^x}_F \underbrace{\sin x}_G - \int \underbrace{e^x}_F \underbrace{\cos x}_g dx \\ &= e^x - \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx \right) \\ &= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx,\end{aligned}$$

a tedy

$$\int e^x \sin x dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Věta 89 (Darboux).

Důkaz. Nechť $J \subset I$ je interval. Chceme ukázat, že $f(J)$ je interval. Vezměme $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$ a $z \in (y_1, y_2)$. Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ takové, že $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Předpokládejme, že $x_1 < x_2$. Druhý případ by se řešil analogicky. Označme F funkci primitivní k f na I . Položme

$$H(x) = F(x) - zx, \quad x \in I.$$

Funkce H je spojitá na I , a tedy i na $[x_1, x_2]$. Existuje $x^* \in [x_1, x_2]$, kde H nabývá minima na $[x_1, x_2]$. Platí

$$H'(x) = F'(x) - z = f(x) - z, \quad x \in I,$$

tedy

$$H'(x_1) = f(x_1) - z = y_1 - z < 0, \quad (13)$$

$$H'(x_2) = f(x_2) - z = y_2 - z > 0. \quad (14)$$

Z (13) plyne, že existuje $\delta_1 > 0$ takové, že

$$\forall x \in (x_1, x_1 + \delta_1) : H(x_1) > H(x).$$

Z (14) plyne, že existuje $\delta_2 > 0$ takové, že

$$\forall x \in (x_2 - \delta_2, x_2) : H(x) < H(x_2).$$

Odtud plyne, že $x^* \in (x_1, x_2)$. Proto je x^* bodem lokálního minima H , a tedy $H'(x^*) = 0$. Proto je $f(x^*) = z$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Věta 90 (První věta o substituci).

Důkaz. Platí

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

□

Věta 91 (Druhá věta o substituci).

Důkaz. Podle věty 89 je φ' na (α, β) kladná nebo je φ' na (α, β) záporná. Předpokládejme první možnost, druhá se dokáže analogicky. Potom je φ rostoucí na (α, β) , a je tedy prostá. Potom $\varphi^{-1} : (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$ je dobře definována. Počítejme

$$\begin{aligned} (G \circ \varphi^{-1})' &= G'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot \underbrace{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}_{\neq 0} \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}. \end{aligned}$$

□

Příklad. Mějme funkci

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak je $F'(x) = 0$ a pro $x \neq 0$ je

$$F'(x) = \underbrace{2x \sin \frac{1}{x^2}}_{\rightarrow 0} + x^2 \cos \frac{1}{x^2} \cdot \frac{-2}{x^2}.$$

Derivace $F(x)$ není spojitá v nule.

Poznámka 60. viz prezentaci

8.2 Integrace racionálních funkcí

Definice 72.

Integrace parciálních zlomků. Rozlišujeme parciální zlomky více typů.

(a) Parciální zlomky prvního typu jsou zlomky tvaru

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx, \quad a \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Integrujeme je následovně:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx \stackrel{c}{=} \begin{cases} A \log |x-a|, & x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a, \infty) & n = 1, \\ \frac{1}{1-n} \cdot \frac{A}{(x-a)^{n-1}}, & x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a, \infty) & n > 1. \end{cases}$$

(b) Parciální zlomky druhého typu jsou zlomky tvaru

$$I = \int \frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx,$$

kde $B, C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{N}$ a $\alpha^2 - 4\beta < 0$ (tedy polynom ve jmenovateli nemá reálné kořeny). Pak je:

$$I = \frac{B}{2} \underbrace{\int \frac{2x + \alpha}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx}_{I_1} + \left(C - \frac{B\alpha}{2}\right) \underbrace{\int \frac{1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx}_{I_2}.$$

Jednotlivé funkce zintegrujeme následovně:

$$\begin{aligned} I_1 &\stackrel{c}{=} \begin{cases} \log(x^2 + \alpha x + \beta), & x \in \mathbb{R}, \quad q = 1, \\ \frac{1}{1-q} \frac{1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^{q-1}}, & x \in \mathbb{R}, \quad q > 1. \end{cases} \\ I_2 &= \int \frac{1}{\left((x + \frac{\alpha}{2})^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)^q} dx \\ &= \frac{1}{\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)^q} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{x + \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2 + 1\right)^q} dx, \end{aligned}$$

a tento případ převedeme substitucí na integraci

$$\int \frac{1}{(t^2 + 1)^q} dt$$

až na nějakou konstantu.