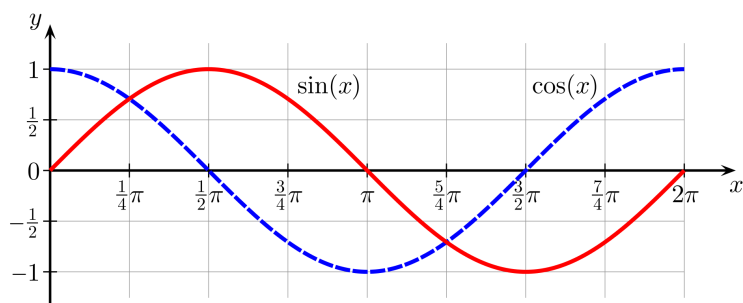
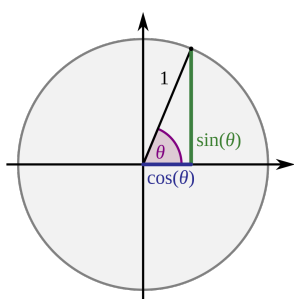


Goniometrické funkce

β [°]	0	30	45	60	90	180	270	360
α [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{cotg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Sinus a cosinus

Definice 1 (Sinus a cosinus). Necht je dána jednotková kružnice. Hodnotou funkce sinus (resp. cosinus) v bodě x nazveme y -ovou (resp. x -ovou) souřadnici průsečíku této kružnice s ramenem úhlu svírajícím s x -ovou osou úhel $\theta = x$.



Věta 1

$\forall x \in \mathbb{R} :$

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

Věta 2. Trigonometrická jednička

$\forall x \in \mathbb{R} :$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Tangens a kotangens

Definice 2 (Tangens a kotangens). Funkcí tangens (resp. kotangens) nazýváme funkci danou vztahem:

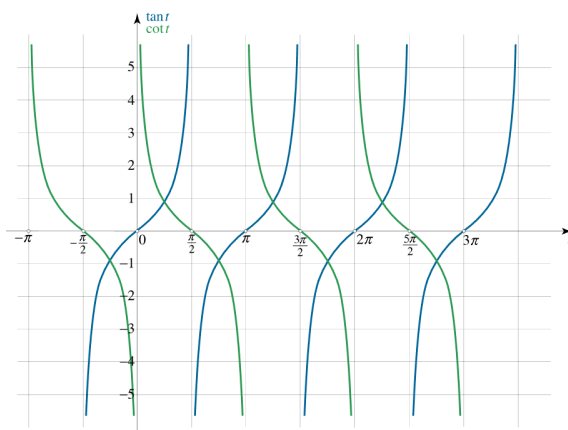
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Poznámka (Sekans a kosekans). Existují i funkce sekans a kosekans.

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{|AB|}{|BC|}$$



Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Věta 3

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \begin{aligned} \sin x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), & \operatorname{tg} x &= \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \\ \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), & \operatorname{cotg} x &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{aligned}$$

Věta 4

$$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \quad \begin{aligned} \sin x &= \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x) \\ \cos x &= -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x) \\ \operatorname{tg} x &= -\operatorname{tg}(\pi - x) \\ \operatorname{cotg} x &= -\operatorname{cotg}(\pi - x) \end{aligned}$$

Věta 5

	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
$\sin x$	—	$\sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}}$
$\cos x$	$\sqrt{1 - \sin^2 x}$	—	$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{\operatorname{cotg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	—	$\frac{1}{\operatorname{cotg} x}$
$\operatorname{cotg} x$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$	—

Důkaz 5.1

V prvním kvadrantu plyne z Pythagorovy věty, v ostatních z definice.

Věta 6. Součtové vzorce sinu a kosinu

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad \begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y \end{aligned}$$

Věta 7. Součtové vzorce pro tangens

$$\forall x, y \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \right\}, \forall (x+y) \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \right\}, \forall (x-y) \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \right\} :$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

Důkaz 7.1

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y} = \frac{\frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y}}{\frac{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

Věta 8. Součtové vzorce pro kotangens

$$\forall x, y \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}, \forall (x+y) \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}, \forall (x-y) \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\} :$$

$$\cotg(x \pm y) = \frac{\cotg x \cdot \cotg y \mp 1}{\cotg x \pm \cotg y}$$

Důkaz 8.1

$$\cotg(x+y) = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \frac{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y}{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y} = \frac{\frac{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y}{\sin x \cdot \sin y}}{\frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\sin x \cdot \sin y}} = \frac{\cotg x \cdot \cotg y - 1}{\cotg x + \cotg y}$$

Věta 9. Vzorce pro goniometrické funkce dvojnásobného argumentu

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Věta 10. Vzorce pro goniometrické funkce polovičního argumentu

$$\forall x \in \mathbb{R} : \qquad \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \qquad \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Důkaz 10.1

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x \text{ a } \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 1$$

$$\begin{array}{ll} 2 \cos^2 \frac{x}{2} = \cos x + 1 & 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x \\ \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos x + 1}{2} & \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \\ \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{\cos x + 1}{2}} & \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \end{array}$$

Věta 11. Vzorce pro součet a rozdíl goniometrických funkcí

$$\begin{array}{ll} \forall x, y \in \mathbb{R} : & \\ \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} & \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} & \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \end{array}$$

Důkaz 11.1

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= \sin \left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right) + \sin \left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right) = \\ &= \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} + \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

v ostatních případech analogicky

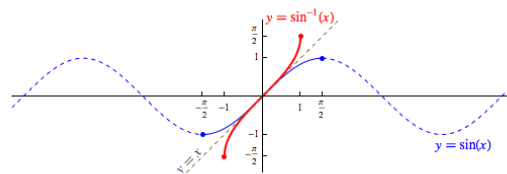
Cyklometrické funkce

Poznámka. Cyklometrickými funkcemi nazýváme funkce inverzní k goniometrickým funkcím. Musíme omezit $D(f)$, protože goniometrické funkce nejsou prosté.

Arkussinus a arkuskosinus

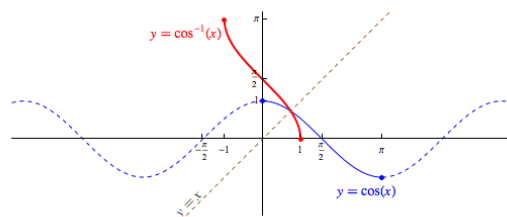
Definice 3 (Arkussinus). Funkce arkussinus, označená $f^{-1} : y = \arcsin x$, se nazývá funkce inverzní k funkci $f : y = \sin x$, kde $D(f) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Tato funkce má následující vlastnosti:

1. $D(f)^{-1} = \langle -1, 1 \rangle$, $H(f)^{-1} = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
2. f^{-1} je rostoucí v celém $D(f^{-1})$



Definice 4 (Arkuskosinus). Funkce arkuskosinus, označená $g^{-1} : y = \arccos x$, se nazývá funkce inverzní k funkci $g : y = \cos x$, kde $D(g) = \langle 0, \pi \rangle$. Tato funkce má následující vlastnosti:

1. $D(g)^{-1} = \langle -1, 1 \rangle$, $H(g)^{-1} = \langle 0, \pi \rangle$
2. g^{-1} je klesající v celém $D(g^{-1})$



Definice 5 (Arkustangens). Funkce arkustangens, označená $h^{-1} : y = \operatorname{arctg} x$, se nazývá funkce inverzní k funkci $h : y = \operatorname{tg} x$, kde $D(h) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Tato funkce má následující vlastnosti:

1. $D(h)^{-1} = \mathbb{R}$, $H(h)^{-1} = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
2. h^{-1} je rostoucí v celém $D(h^{-1})$

Definice 6 (Arkuskotangens). Funkce arkuskotangens, označená $k^{-1} : y = \operatorname{arccotg} x$, se nazývá funkce inverzní k funkci $k : y = \operatorname{cotg} x$, kde $D(k) = (0, \pi)$. Tato funkce má následující vlastnosti:

1. $D(k)^{-1} = \mathbb{R}$, $H(h)^{-1} = (0, \pi)$
2. k^{-1} je klesající v celém $D(k^{-1})$

Věta 12. Platí:

1. $u = \arcsin v \Leftrightarrow v = \sin u, v \in \langle -1, 1 \rangle, u \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
2. $u = \arccos v \Leftrightarrow v = \cos u, v \in \langle -1, 1 \rangle, u \in \langle 0, \pi \rangle$
3. $u = \operatorname{arctg} v \Leftrightarrow v = \operatorname{tg} u, v \in \mathbb{R}, u \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
4. $u = \operatorname{arccotg} v \Leftrightarrow v = \operatorname{cotg} u, v \in \mathbb{R}, u \in \langle 0, \pi \rangle$

Věta 13. Sinová věta

V každém trojúhelníku ABC platí:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

kde R je poloměr kružnice opsané

Věta 14. Kosinová věta

V každém trojúhelníku ABC platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Věta 15

V každém trojúhelníku ABC platí:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$