petr.maly@matfyz.cuni.cz

OPTIKA

- Moodle, učebnice Optika
- zápočet jako elmag, testy asi 10.11. a 5.1.

Sylabus:
0. Úvod
1. Světlo jako elektromagnetické vlny
2. Kvazimonochromatické elektromagnetické vlny
3. Interference světla
4. Ohybové jevy
5. Geometrická a přístrojová optika
6. Šíření světla v anisotropních prostředích
7. Fourierova optika
8. Interakce světla s látkou
9. Základy vláknové optiky
10. Nelineární optika
11. Vlnově korpuskulární dualismus

0. Úvod

- historie
- optika zahrnuje i techniku a technologii
- optická oblast = IR, viditelné a UV

1. Světlo jako elmag. vlny

Maxwellovy rce

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$
$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}$$
$$\nabla \cdot \vec{D} = \varrho$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Vlnové rce

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) = 0$$
$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mu_0 \vec{H} + \nabla \times \mu_0 \vec{M}) = 0$$
$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} + \mu_0 \vec{P}) + \frac{\partial}{\partial t}\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \nabla \times \vec{M}) = 0$$

NEMAGNETICKÉ LÁTKY

budeme uvažovat $\vec{M} = \vec{0}$, $\vec{j}$ mimo vodiče $= \vec{0}$, ve vodiči $\vec{j} = \sigma \vec{E}$,
dále $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} + \vec{P}_{NELIN.}$ často $= \vec{0}$ LINEÁRNÍ LÁTKY

dielektrika ($\sigma = 0$): $\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mu_0 \varepsilon_0 (1+\chi) \vec{E}) = 0$

$1 + \chi = \varepsilon_r$, $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$

pro $\nabla \cdot \vec{E} = 0$:
$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

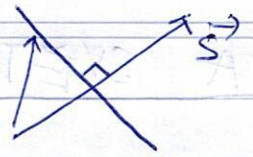
$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \Rightarrow \frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_0^2} \varepsilon_r$$

$$\Rightarrow c = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c_0}{n}$$ ← INDEX LOMU

vakuum: $n = 1$, $c = c_0$

jsou různé tvary vln, základní ROVINNÁ VLNA:
SMĚR ŠÍŘENÍ $\vec{s}$, pole v kolmém směru na $\vec{s}$
nezávisí na souřadnici

- pro $\vec{s} = \vec{e}_3$ $\quad vt - z$
  $\vec{s} \neq \vec{e}_3$ $\quad vt - \vec{r}\cdot\vec{s}$



$\vdots$

$\vec{s} \times \vec{E} = c\vec{B}$
$\vec{s} \times \vec{B} = -\frac{1}{c}\vec{E}$

$E = cB = c\mu H = \frac{\sqrt{\mu_0 \mu_r}}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} H = ZH$ (impedance)

$Z_0 = \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0}} \doteq 376\ \Omega$ – impedance vakua

- v elmag. el a mag. „ekvivalentní", optika dává přednost el. poli $\vec{E}$ – přechody v látkách dominovány el. dipólovými přechody, dále $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, tj. pro nízké rychlosti druhý člen zanedbatelný

HARMONICKÁ ROVINNÁ VLNA

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$$

(kz) když ve směru $\vec{e}_3$

VELIKOST VLNOVÉHO VEKTORU

ν – frekvence, ω, T, k, ...

$T = \frac{2\pi}{\omega}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\lambda = \frac{c}{\nu}$

$$\vec{k} = k\cdot\vec{s} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{s} = \frac{\omega}{c}\vec{s} = \frac{\omega}{c_0} n \vec{s} = k_0 n \vec{s}$$

$k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{\varepsilon_r}$

rovinné vlny se běžně (lineárně) skládají

KOMPLEXNÍ REPREZENTACE

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{1}{2}\left[e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)} + e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)}\right]$$

$$\rightarrow \tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underbrace{\tilde{\vec{E}}_0(\vec{r})\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \cdot e^{-i\varphi}}$$

$\tilde{\vec{E}}_0(\vec{r})$ – KOMPLEXNÍ AMPLITUDA

$$\mathrm{Re}\{\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t)\} = \vec{E}(\vec{r},t)$$

KOMPLEXNÍ ČÍSLA V OPTICE

$\tilde{\vec{v}} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$, $v_j = p_j + i\cdot q_j$;

$\tilde{\vec{v}}\cdot\tilde{\vec{v}} = \sum v_j v_j = \sum p_j^2 + 2i\, p_j q_j - q_j^2$

$\tilde{\vec{v}}\cdot\tilde{\vec{v}}^* = \sum p_j^2 + q_j^2 = |\tilde{\vec{v}}|^2$

OPTICKÝ SKALÁRNÍ SOUČIN

INTENZITA SVĚTLA

energie se šíří s Poyntingovým vektorem $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, to je ale nelineární

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{H}(\vec{r},t) \rightarrow \vec{S} = \frac{1}{2}\left(\tilde{\vec{E}} + \tilde{\vec{E}}^*\right) \times \frac{1}{2}\left(\tilde{\vec{H}} + \tilde{\vec{H}}^*\right)$$

$$\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}_0 \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$
$$\tilde{\vec{H}} = \tilde{\vec{H}}_0 \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{S} = \frac{1}{4}\left[\tilde{\vec{E}}_0 \times \tilde{\vec{H}}_0 e^{-2i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} + \tilde{\vec{E}}_0^* \times \tilde{\vec{H}}_0^* e^{+2i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} + \tilde{\vec{E}}_0 \times \tilde{\vec{H}}_0^* + \tilde{\vec{E}}_0^* \times \tilde{\vec{H}}_0\right]}$$

INTENZITA SVĚTLA: $I = \left|\langle \vec{S}(\vec{r},t) \rangle_t\right|$ [W/m²]

(kolmo na směr šíření; časová střední hodnota)

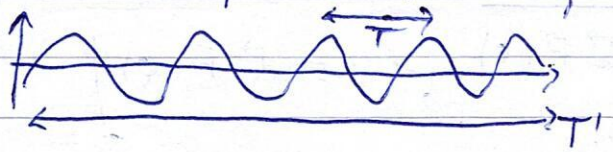
co první dva členy: $\left\langle \tilde{\vec{E}}_0 \times \tilde{\vec{H}}_0 e^{-2i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \right\rangle_t \overset{\vec{r}=0}{=} \frac{1}{T'} \int_t^{t+T'} \tilde{\vec{E}}_0 \times \tilde{\vec{H}}_0 e^{-2i\omega t}\, dt =$

$$= \left(\tilde{\vec{E}}_0 \times \tilde{\vec{H}}_0\right) \cdot \frac{1}{T'} \cdot \frac{1}{-2i\omega}\left(e^{-i\frac{T}{T'}2\omega} - e^{+i\frac{T}{T'}2\omega}\right)$$

$$= \left(\tilde{\vec{E}}_0 \times \tilde{\vec{H}}_0\right) \cdot \left(\frac{1}{T'} \cdot \frac{1}{-2i\omega}\right) \cdot -2i \sin(T\omega)$$

$\frac{T}{T'} \cdot \frac{1}{2\pi}$

klasická optika: $\frac{T}{T'} \ll 1$, tj. $\langle \rangle \approx 0$



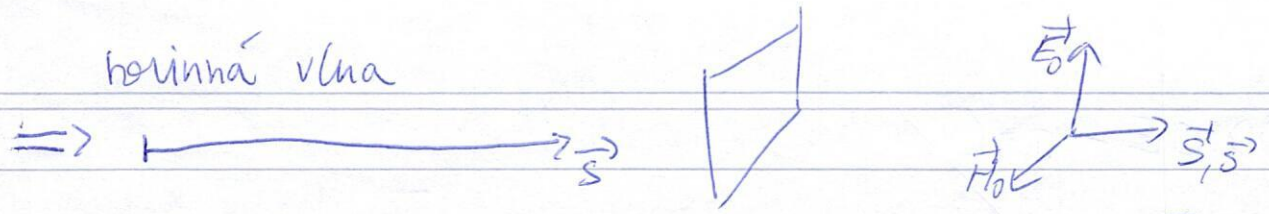
$$\Rightarrow I = \left|\langle \vec{S} \rangle\right| = \frac{1}{4} \cdot 2\,\mathrm{Re}\left\{\tilde{\vec{E}}_0 \times \tilde{\vec{H}}_0^*\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\tilde{\vec{E}}_0^* \times \tilde{\vec{H}}_0\right\},$$

$$\sqrt{\varepsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu_0}H_0 \Rightarrow H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0 \Rightarrow I = \left|\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\underbrace{\tilde{\vec{E}}_0 \times \tilde{\vec{H}}_0^*}_{\parallel \vec{S}}\right\}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\tilde{\vec{E}}_0 \cdot \tilde{\vec{E}}_0^* = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2 = I}$$

pro diel. $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0\varepsilon_r \Rightarrow \boxed{I = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2}$

$n = \sqrt{\varepsilon_r}$



$I = E_0 H_0 \langle \cos^2(\omega t) \rangle_t = \frac{1}{2} E_0 H_0$, ale $B = \frac{E_0}{c} = \frac{E_0}{c_0} n$

a $H_0 = \frac{1}{\mu_0} B_0$

CELKEM: $I = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{1}{c_0} n E_0^2$, ale $c_0^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n E_0^2}$

dále $W_E = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$, $W_M = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$, když $E = E_0 \cos \omega t$

$\Vert \frac{1}{2} \varepsilon E^2$ $\Vert \frac{1}{2} \mu H^2$ $H = H_0 \cos \omega t$

pak $\langle W_E \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon E_0^2$, po dosazení a úpravě

$\langle W_M \rangle = \frac{1}{4} \mu H_0^2$

$\langle W_E \rangle = \langle W_M \rangle$, $\langle W_E \rangle + \langle W_M \rangle = I$

ŠÍŘENÍ EM VLNY V NEVOD. NEMAG. ... PROSTŘEDÍ
A VE VOD. NEMAG. ... PROSTŘEDÍ

Vlnová rce z Maxw. rcí:

$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$

$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$

$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} = \vec{0}$

$\nabla \cdot \vec{E} - \Delta \vec{E}$

$= 0$

a mat. vztahů: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

$-\Delta \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D} + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0$

$-\Delta \vec{E} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$

1) DIELEKTRIKA – $\sigma = 0$

$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

v komplexní symbolice: $\vec{\tilde{E}} = \vec{\tilde{E}}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$, výhodné $\frac{\partial}{\partial t}$:

$\frac{\partial}{\partial t} \to \cdot (-i\omega)$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \to \cdot (-\omega^2)$ a pro úplnost $\frac{\partial}{\partial x}$:

$\frac{\partial}{\partial x} \to \cdot i k_x$

$\Rightarrow \Delta \vec{E} + \underbrace{\mu_0 \varepsilon \omega^2}_{= \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \omega^2 = \frac{1}{c_0^2} \varepsilon_r \omega^2} \vec{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0}$ HELMHOLTZŮV TVAR VLN. RCE

$k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\varepsilon_r} \Rightarrow = k^2$

2) VODIČE – $\sigma \neq 0$

$$-\Delta \vec{E} - (\mu_0 \varepsilon \omega^2 + i \mu_0 \sigma \omega)\vec{E} = 0$$

analogicky k 1) zavedeme $\tilde{k}$ – KOMPLEXNÍ VLNOVÝ VEKTOR

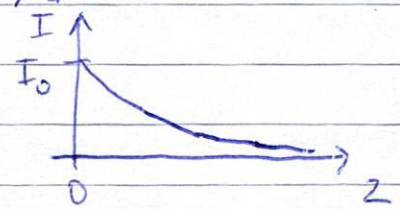
$$\tilde{k} = k_R + i k_I, \quad \tilde{k}^2 = \mu_0 \varepsilon \omega^2 + i \mu_0 \sigma \omega$$
$$(k_R + i k_I)^2 = \mu_0 \varepsilon \omega^2 + i \mu_0 \sigma \omega = k_R^2 - k_I^2 + 2 i k_R k_I$$
M.P.K.: $k_R^2 - k_I^2 = \mu_0 \varepsilon \omega^2$
$$2 k_R k_I = \mu_0 \sigma \omega \Rightarrow k_I = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2 k_R}$$
$$\Rightarrow k_R^2 - \left(\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2 k_R}\right)^2 = \mu_0 \varepsilon \omega^2 \quad / \cdot k_R^2$$
$$k_R^4 - \mu_0 \varepsilon \omega^2 k_R^2 - \left(\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}\right)^2 = 0$$

po vyřešení a splnění podmínek ($k_R \in \mathbb{R}$, $k_R^2 \geq 0$):

$$k_R = \mu_0 \varepsilon \omega^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2} + 1}, \quad k_I = \mu_0 \varepsilon \omega^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2} - 1}$$

lze zavést komplexní index lomu: $\boxed{\tilde{n} = \frac{c_0}{\omega} \tilde{k}}$, pak:

$$\vec{\tilde{E}} = \vec{\tilde{E}}_0 e^{-i(\omega t - \vec{\tilde{k}} \cdot \vec{r})}, \quad \vec{s} = (0,0,1) \Rightarrow \vec{\tilde{E}} = \vec{\tilde{E}}_0 e^{-i(\omega t - \tilde{k} z)} =$$
$$\boxed{\vec{\tilde{E}} = \vec{\tilde{E}}_0 e^{-i(\omega t - k_R z)} \cdot e^{-k_I z}} \quad \text{– exp. tlumené}$$
$$\Rightarrow I \propto E^2 \propto e^{-2 k_I z}, \quad \boxed{I = I_0 \cdot e^{-\alpha z}} \quad \alpha \text{ ABSORPČNÍ KOEFICIENT}$$
$$\boxed{\alpha = 2 k_I}$$



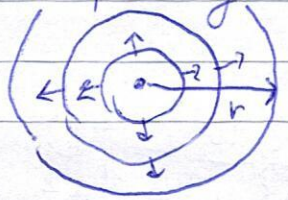
LAMBERT–BEERŮV ZÁKON

KULOVÉ VLNY

řešení vln. rce jsou i kulové plochy

$$f(r,t) = \frac{A}{r} e^{-i(\omega t \pm k r)}$$

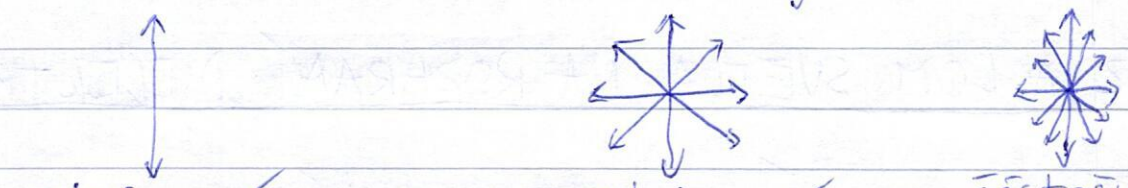
musíme vzít skalární aprox.



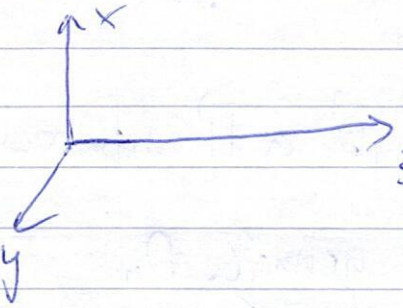
POLARIZACE SVĚTLA

uvažujeme rovinné monochromatické vlny

$\vec{E}$ kmitá kolmo na směr šíření – v rovině
polarizované světlo = $\vec{E}$ kmitá jen v určitém směru



polarizované nepolarizované částečně polarizované



$$E_x = E_{x0}\cos(\omega t - kz + \delta_x)$$
$$E_y = E_{y0}\cos(\omega t - kz + \delta_y)$$ } fázový posuv

$\delta_x - \delta_y = 0$ – lin. polar.
$\delta_x - \delta_y = \frac{\pi}{2}$ – kruhový pohyb
... – obecně eliptická pol.:

$\frac{E_x}{E_{x0}} =: \varepsilon_x$, $\frac{E_y}{E_{y0}} =: \varepsilon_y$, $\omega t - kz =: \alpha$

$$\Rightarrow \varepsilon_x = \cos(\alpha + \delta_x),\ \varepsilon_y = \cos(\alpha + \delta_y)$$

$\varepsilon_x = \cos\alpha\cos\delta_x - \sin\alpha\sin\delta_x$, $\varepsilon_y = \cos\alpha\cos\delta_y - \sin\alpha\sin\delta_y$

$\cdot\sin\delta_y$: $\sin\delta_y\,\varepsilon_x = \cos\alpha\sin\delta_y\cos\delta_x - \sin\alpha\cdot\sin\delta_y\sin\delta_x$

$\cdot\sin\delta_x$: $\sin\delta_x\,\varepsilon_y = \cos\alpha\cos\delta_y\sin\delta_x - \sin\alpha\cdot\sin\delta_y\sin\delta_x$ (−)

$$\varepsilon_x\sin\delta_y - \varepsilon_y\sin\delta_x = \cos\alpha(\sin\delta_y\cos\delta_x - \cos\delta_y\sin\delta_x)$$
$$= \cos\alpha\sin(\delta_y - \delta_x),\quad \delta_y - \delta_x =: \delta$$

$\cdot\cos\delta_y$: $\cos\delta_y\,\varepsilon_x = \cos\delta_y\cos\alpha\cos\delta_x - \cos\delta_y\sin\alpha\sin\delta_x$

$\cdot\cos\delta_x$: $\cos\delta_x\,\varepsilon_y = \cos\delta_x\cos\alpha\cos\delta_y - \cos\delta_x\sin\alpha\sin\delta_y$ (−)

$$\varepsilon_x\cos\delta_y - \varepsilon_y\cos\delta_x = \sin\alpha(\sin\delta_y\cos\delta_x - \cos\delta_y\sin\delta_x)$$
$$= \sin\alpha\cdot\sin\delta$$

$$(\varepsilon_x\sin\delta_y - \varepsilon_y\sin\delta_x)^2 = \cos^2\alpha\sin^2\delta$$
$$(\varepsilon_x\cos\delta_y - \varepsilon_y\cos\delta_x)^2 = \sin^2\alpha\sin^2\delta$$

$$(\varepsilon_x^2\sin^2\delta_y + \varepsilon_y^2\sin^2\delta_x - 2\varepsilon_x\varepsilon_y\sin\delta_y\sin\delta_x) +$$
$$+ \varepsilon_x^2\cos^2\delta_y + \varepsilon_y^2\cos^2\delta_x - 2\varepsilon_x\varepsilon_y\cos\delta_y\cos\delta_x = \sin^2\delta$$

$$E_x^2 + E_y^2 - 2E_xE_y \sin\delta_x \sin\delta_y - 2E_xE_y \cos\delta_x \cos\delta_y = \sin^2\delta$$
$$E_x^2 + E_y^2 - 2E_xE_y \cos\delta = \sin^2\delta$$
$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2\frac{E_xE_y}{E_{0x}E_{0y}}\cos\delta = \sin^2\delta$$ – rovnice elipsy

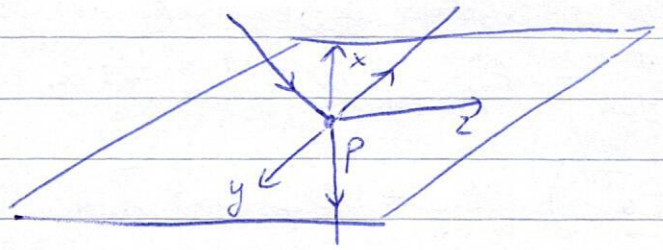
pravotočivé – $\delta > 0$, levotočivé – $\delta < 0$

ODRAZ A LOM SVĚTLA NA ROZHRANÍ DIELEKTRIK

uvažujeme rovinné monochromatické vlny a rovinné rozhraní

budeme vycházet z chování $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}$ a $\vec{H}$ na rozhraní

spojité tečné E_t, normál. B_n — nespojité normál. D_n, tečné H_t



když $\vec{r}$ leží v ploše rozhraní, musí být všude stejné fázové faktory, to platí i pro různé časy

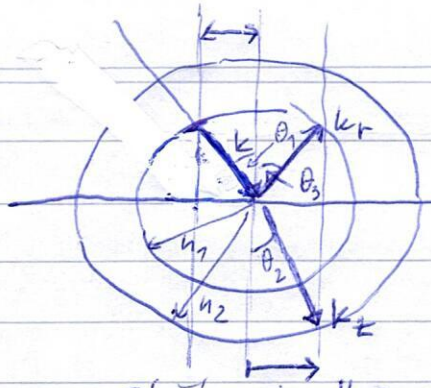
fázový faktor – $e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ (dopadající; odražená (reflected); prošlá (transmitted))

pro $\vec{r} = \vec{0}$: $e^{-i(\omega t)}$, $= e^{-i(\omega_r t)}$, $= e^{-i(\omega_t t)}$, tedy $\omega = \omega_r = \omega_t$

pro $t = 0$: – II –, tedy $\vec{k}\cdot\vec{r} = \vec{k}_r\cdot\vec{r} = \vec{k}_t\cdot\vec{r}$

$\vec{r}$ v ploše $\Rightarrow (\vec{k} - \vec{k}_r)\cdot\vec{r} = 0$, $(\vec{k} - \vec{k}_t)\cdot\vec{r} = 0$

$\Rightarrow (\vec{k} - \vec{k}_r)$, a $(\vec{k} - \vec{k}_t)$ musí být kolmé k $\vec{r}$, tj. k rozhraní



$\vec{k} = \frac{\omega}{c_0} \cdot n \cdot \vec{s}$

Složka $k \parallel$ s rozhraním – zachovává se: $k \sin\theta_1 = k_t \sin\theta_2$

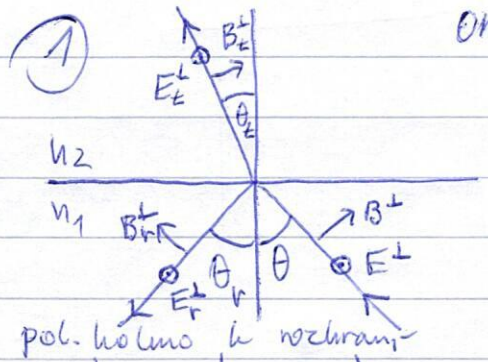
ZÁKON LOMU
SNELLŮV ZÁKON
$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Leftarrow \frac{\omega}{c_0} n_1 \sin\theta_1 = \frac{\omega}{c_0} n_2 \sin\theta_2$$

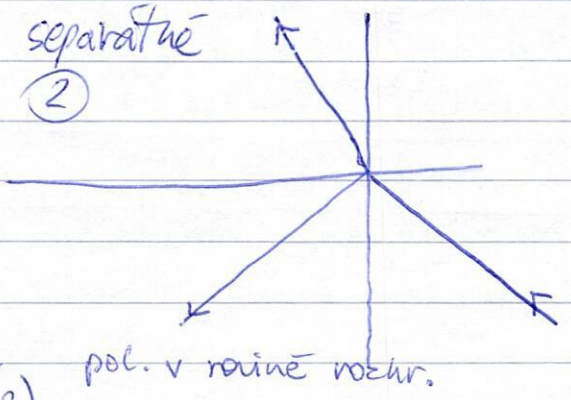
– zachovává se: $k \cdot \sin\theta_1 = k_r \cdot \sin\theta_3$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_1 = \theta_3}$$ ZÁKON ODRAZU

- a kolik světla projde a kolik se odrazí?

ortog. komponenty separátně





① : $E^\perp + E_r^\perp = E_t^\perp$ – pozor na znam. (2) plus. směry v obr.

- $B^\perp \cos\theta - B_r^\perp \cos\theta_r = B_t^\perp \cos\theta_t$, když
$B = \frac{E}{c_0} n$, potom
$E^\perp n_1 \cos\theta - E_r^\perp n_1 \cos\theta_r = E_t^\perp n_2 \cos\theta_t$ (1)

KOEFICIENT ODRAZU: $\boxed{r^\perp := E_r^\perp : E^\perp}$
KOEFICIENT PRŮCHODU: $\boxed{t^\perp := E_t^\perp : E^\perp}$

(2),(1) $\Rightarrow E^\perp n_1 \cos\theta - E_r^\perp n_1 \cos\theta = (E^\perp + E_r^\perp) n_2 \cos\theta_t$

$E^\perp (n_1 \cos\theta - n_2 \cos\theta_t) = E_t^\perp (n_1 \cos\theta + n_2 \cos\theta_t)$

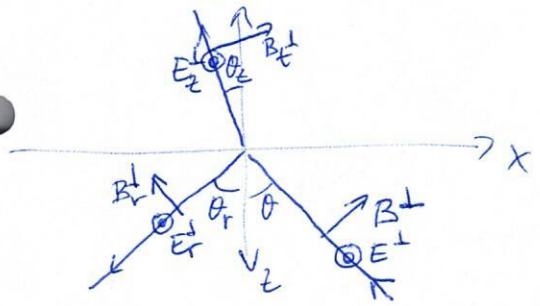
$$\boxed{r^\perp = \frac{E_r^\perp}{E^\perp} = \frac{n_1 \cos\theta - n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta + n_2 \cos\theta_t}}$$

- ... $$\boxed{t^\perp = \frac{2 n_1 \cos\theta}{n_1 \cos\theta + n_2 \cos\theta_t}}$$

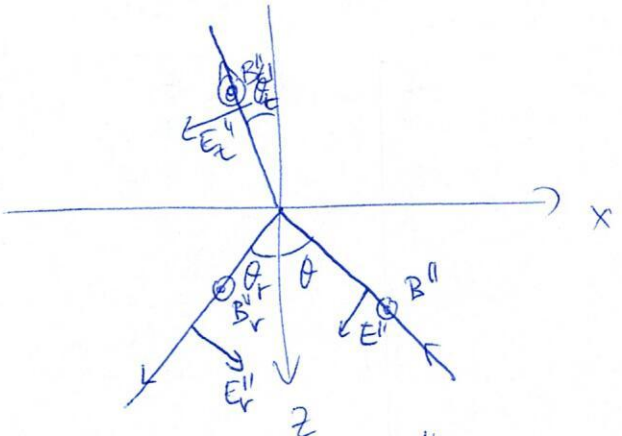
při kolmém dopadu $\theta = \theta_t = 0$: $r^\perp = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$, ve skle $n_2 \doteq 1{,}5$, $r^\perp = \frac{-1}{5}$

hic nechybí

Fresnelovy vzorce



používáme $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$



$$E_0^{\perp} + E_{0r}^{\perp} = E_{0t}^{\perp}$$

ze zákonů elektrostatiky na rozhraní dielektrika

$$B_0^{\perp}\cos\theta - B_{0r}^{\perp}\cos\theta = B_{0t}^{\perp}\cos\theta_t$$

dále je $B = \frac{n}{c_0} E$, dostaneme

$$E_0^{\perp} + E_{0r}^{\perp} = E_{0t}^{\perp}$$

$$n_1 E_0^{\perp}\cos\theta - n_1 E_{0r}^{\perp}\cos\theta = n_2 E_{0t}^{\perp}\cos\theta_t$$

a

$$n_1 E_0'' + n_1 E_{0r}'' = n_2 E_{0t}''$$

$$-E_0''\cos\theta + E_{0r}''\cos\theta = E_{0t}''\cos\theta_t$$

Dostáváme koeficienty

$$r^{\perp} = \frac{E_{0r}^{\perp}}{E_0^{\perp}} = \frac{n_1\cos\theta - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta + n_2\cos\theta_t}$$

$$t^{\perp} = \frac{E_{0t}^{\perp}}{E_0^{\perp}} = \frac{2 n_1\cos\theta}{n_1\cos\theta + n_2\cos\theta_t}$$

obdobně pro druhou dvojici vzorců

$$r'' = \frac{E_{0r}''}{E_0''} = \frac{n_2\cos\theta - n_1\cos\theta_t}{n_1\cos\theta + n_1\cos\theta_1}$$

$$t'' = \frac{E_{0t}''}{E_0''} = \frac{2 n_1\cos\theta}{n_2\cos\theta + n_1\cos\theta_t}.$$

Fresnelovy vzorce

Speciální případ: $\theta = 0$, $\theta_t = 0$, $\theta_r = 0$

$$r^{\perp} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \qquad r'' = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} = -r^{\perp}$$

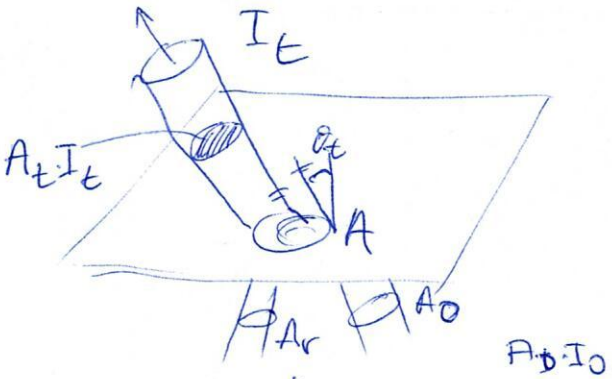
– z důvodu volby směrů E

Intenzita světla

$$I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, n_1 E_0^2$$

$$I_r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, n_1 E_{0r}^2$$

$$I_t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, n_2 E_{0t}^2$$



celk. výkon $A_r \cdot I_r$

$$A \cdot \cos\theta_t = A_t$$
$$A \cdot \cos\theta = A_0$$
$$A \cdot \cos\theta_r = A_r$$

energetický tok:

$$j_0 = I_0 \cdot A \cos\theta$$
$$j_t = I_t \cdot A \cos\theta_t$$
$$j_r = I_r \cdot A \cos\theta_r$$

$$j_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, n_1 E_0 A \cos\theta$$
$$j_t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, n_1 E_t A \cos\theta_t$$
$$j_r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, n_1 E_r A \cos\theta_r$$

$j_0 = j_r + j_t$ zákon zachování

$\theta_r = \theta_t$

$$\boxed{R = \frac{j_r}{j_0} = \frac{E_{0r}^2}{E_0^2} = r^2}$$ koeficient odrazivosti

$$\boxed{T = \frac{j_t}{j_0} = \frac{E_{0t}^2}{E_0^2} \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta}}$$ koeficient propustnosti

$$= t^2 \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta}$$

platí pro $\parallel$ i $\perp$

$$j_0^{\parallel,\perp} = j_r^{\parallel,\perp} + j_t^{\parallel,\perp}$$ „intenzitní" koeficienty

$$R^{\parallel,\perp} + T^{\parallel,\perp} = 1$$

Brewsterův úhel

úhel, pro který se ~~světlo neodráží~~ odražené světlo polarizuje

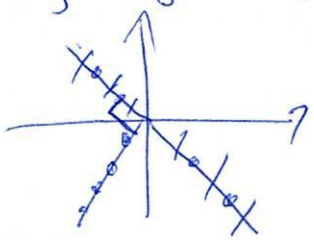
dopadající vlna rozkmitává dipólky v dielektriku, ty vyzařují $\xrightarrow{\text{složení}}$ výsledek

$$\theta_t + \underset{\theta}{\underset{\parallel}{\theta_r}} = 90^\circ$$

Snell: $n_1 \sin\theta = n_2 \sin\theta_t$

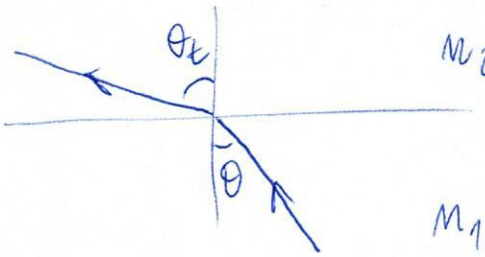
$\rightarrow$ ~~$n_2 \sin\theta$~~ $n_2 \sin(90^\circ - \theta) = n_2 \cos\theta$

$\rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{n_2}{n_1}$, tj. $\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$

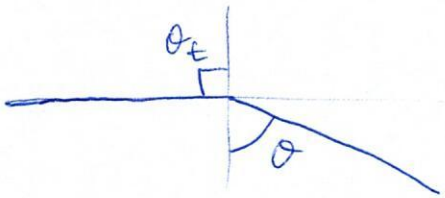


Totální odraz

$n_1 \sin\theta = n_2 \sin\theta_t$ pro $n_2 < n_1$ je $\theta_t > \theta$



$n_2 < n_1$ lom od kolmice



$n_1 \sin\theta = n_2$ ... kritický (mezní) úhel

$$\sin\theta_k = \frac{n_2}{n_1}$$

$$r^\perp = \frac{n_1\cos\theta - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta + n_2\cos\theta_t}$$

$\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t}$ $\quad n_1\sin\theta = n_2\sin\theta_t \Rightarrow \sin\theta_t = \frac{n_1\sin\theta}{n_2}$

$= \sqrt{1-\frac{n_1^2\sin^2\theta}{n_2^2}}$

pro případ $\theta > \theta_t$ $\quad \sin\theta_t = \underbrace{\frac{n_1}{n_2}\sin\theta}_{>1}$

$$\rightarrow \cos\theta_t = i\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta - 1}$$

$$r^\perp = \frac{n_1\cos\theta - n_2 i\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta - 1}}{n_1\cos\theta + n_2 i\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta - 1}}$$

u dielektrik fázový posun 0° nebo 180°, ale tedy i jiné

$$r^\perp = \frac{z_R - i z_I}{z_R + i z_I} = \frac{|\tilde{z}|e^{-i\varphi}}{|\tilde{z}|e^{i\varphi}} = e^{-2i\varphi}$$

obdobně získáme i $r^\parallel$

$\tilde{z} = z_R + i z_I = |\tilde{z}|e^{i\varphi}$

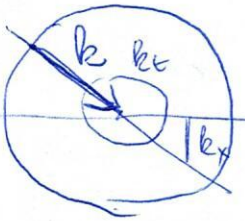
$$tg\,\varphi = \frac{z_I}{z_R} = \frac{n_2\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta - 1}}{n_1\cos\theta} = tg\,\frac{\delta_1}{2}$$

$-2\varphi = \delta_1$

$r^\perp = e^{i\delta_1}$

$k_t^2 = k_{tx}^2 + k_{tz}^2 = k_{tx}^2 - b^2$

evanescentní vlna

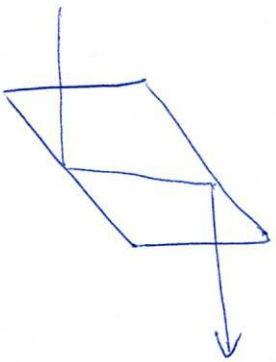


$\vec{k}_t = (k_{tx}, 0, k_{tz})$

$\parallel$ i b

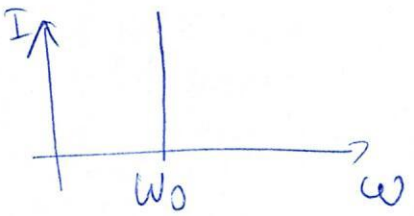
$k_x = k\sin\theta = k_{tx}$

$k_t = \frac{w}{c_0}n_2$

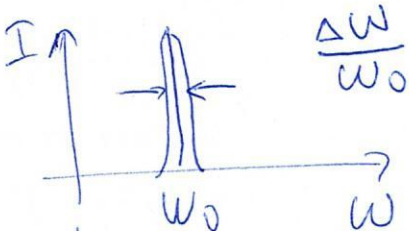


Fresnelův hranol
při odrazech dochází ke změně fáze

2. kvazimonochromatické světlo



monochrom.



kvazimon.

$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$

monochrom.: $\tilde{\vec{E}}(t) = \tilde{\vec{E}}_0 e^{i\varphi} e^{-i\omega t}$, $\vec{r} = \vec{0}$

kvazi. (lin. superpozice): $\tilde{\vec{E}}(t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}} \vec{E}_0(\omega) e^{i\varphi(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega$

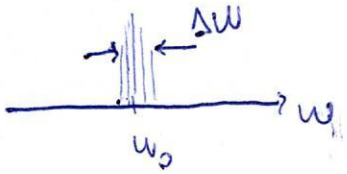
Disperze indexu lomu

$\vec{k} = \frac{\omega}{c_0} n \vec{s}$ $\quad n = n(\omega)$

$\rightarrow \vec{k} = \frac{\omega}{c_0} n(\omega) \vec{s}$

FÁZOVÁ A GRUPOVÁ RYCHLOST SVĚTLA

$\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \tilde{\vec{E}}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$



$\frac{\Delta\omega}{\omega} \ll 1$

$$E(z,t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} E_{0\omega} e^{-i(\omega t - kz)} d\omega$$ — VLNOVÁ GRUPA



fáz. rychl.: $c = \frac{\omega}{k}$

bez disperze se všechny složky šíří stejně, nedochází se grupy

pro disperzní prostředí: $k = \frac{\omega}{c_0} n \qquad n = n(\omega)$

uvažujme: $k(\omega) = k(\omega_0) + \frac{dk}{d\omega}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2k}{d\omega^2}(\omega-\omega_0)^2$

označ.: $\omega = \omega_0 + \delta\omega \Rightarrow d\omega = d(\delta\omega)$

$$\Rightarrow E(z,t) = \int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}} E_{0(\omega_0+\delta\omega)}\, e^{-i\left((\omega_0+\delta\omega)t - \left(k(\omega_0) + \frac{dk}{d\omega}\Big|_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0)\right)z\right)} d(\delta\omega)$$

($\delta\omega$ = $\omega-\omega_0$)

$$E(z,t) = \underbrace{e^{-i(\omega_0 t - k(\omega_0)z)}}_{\text{běžná hov. vlna s } \omega=\omega_0} \cdot \int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}} E_{0(\omega_0+\delta\omega)}\, e^{-i\left(\delta\omega t - \left(\frac{dk}{d\omega}\delta\omega\right)z\right)} d(\delta\omega)$$

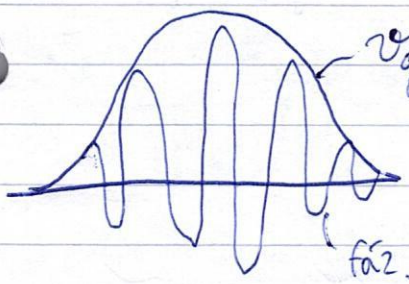
$\Rightarrow$ FÁZOVÁ RYCHLOST — distribuce amplitud — pro $t - \frac{dk}{d\omega}z = \text{konst.}$

$$\Rightarrow \Delta t - \frac{dk}{d\omega}\Delta z = 0$$

GRUPOVÁ RYCHLOST — $\boxed{v_g = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}}}$

$$\boxed{\vec{v_g} = \frac{1}{\frac{d\vec{k}}{d\omega}}} \Leftarrow \boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$$

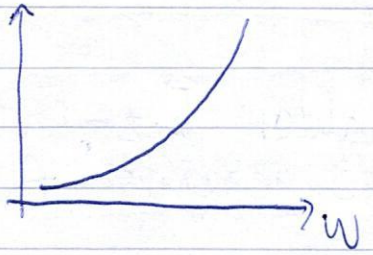
když $k = \frac{\omega}{c_0} n(\omega)$, $\frac{dk}{d\omega} = \underbrace{\frac{1}{c_0} n(\omega)}_{1/c} + \frac{\omega}{c_0}\frac{dn}{d\omega}$



$$\Rightarrow \frac{1}{v_g} = \frac{1}{c}\left(1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right)$$

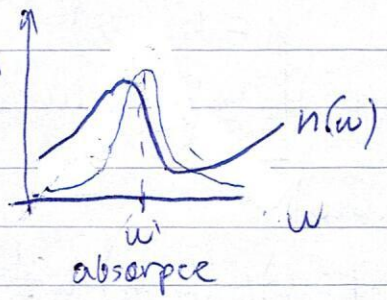
$$\Rightarrow \boxed{v_g = \frac{c}{1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\Big|_{\omega=\omega_0}}}$$

Sklo:



$\frac{dk}{d\omega} > 0 \Rightarrow c > v_g$

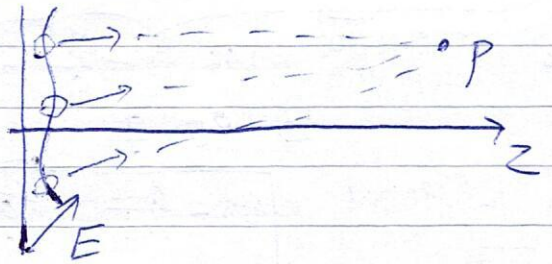
model:



$\frac{dk}{d\omega} < 0 \Rightarrow v_g > c$ – anomální disperze

3. Interference světla

při šíření vlny v jedné směru (z) stačí většinou vzít skalární přiblížení E



dle principu superpozice lze pro pozorování světla v bodě P brát součet složek E míříčích do P

$E(P) = \sum_i E_i$ skládání

tomuto sčítání říkáme:
zdroje mohou být – diskrétní (Σ) – INTERFERENCE
spojité ($\int$) – DIFRAKCE
$E(P) = \int E(\vec{r}_i)$ " ohyb

DVOUSVAZKOVÁ INTERFERENCE

$E_1, E_2 \quad E(P) = E_1(P) + E_2(P)$

$I \sim E^* E \Rightarrow I(P) = \tilde{\vec{E}}_0^1(P) \cdot \tilde{\vec{E}}_0^2(P)$

$\tilde{\vec{E}}_0^1 \quad \tilde{\vec{E}}_0^* \cdot \tilde{\vec{E}}_0$

$\vec{E}_1(P) = \vec{E}_0^1 e^{i\Phi_1(P)} e^{-i\omega t}$

$\vec{E}_2(P) = \vec{E}_0^2 e^{i\Phi_2(P)} e^{-i\omega t}$

$\vec{E}_0^2$

} nemám faktor $\vec{k} \cdot \vec{z}$, protože mě v bodě nezajímá fáze

- $\Rightarrow \tilde{\vec{E}}(P) = \left(\vec{E}_0^1 e^{i\Phi_1} + \vec{E}_0^2 e^{i\Phi_2}\right) e^{-i\omega t}$

$$I(P) = \tilde{\vec{E}}_0^*(P) \cdot \tilde{\vec{E}}_0(P) = \left(\vec{E}_0^1 e^{-i\Phi_1} + \vec{E}_0^2 e^{-i\Phi_2}\right)\left(\vec{E}_0^1 e^{i\Phi_1} + \vec{E}_0^2 e^{i\Phi_2}\right)$$

$$= \vec{E}_0^1 \cdot \vec{E}_0^1 + \vec{E}_0^2 \cdot \vec{E}_0^2 + \vec{E}_0^1 \cdot \vec{E}_0^2 e^{i(\Phi_2-\Phi_1)} + \vec{E}_0^2 \cdot \vec{E}_0^1 \cdot e^{-i(\Phi_2-\Phi_1)}$$

$$= e^{i(\Phi_2-\Phi_1)} + e^{-i(\Phi_2-\Phi_1)} = 2\cos(\Phi_2-\Phi_1)$$

$$= I_1 + I_2 + 2 \cdot \vec{E}_0^1 \cdot \vec{E}_0^2 \cdot 2\cos(\Phi_2-\Phi_1)$$

- Př.: $\vec{E}_0^1 = \vec{E}_0^2$, $\vec{E}_0^1 = (E_0^1, 0, 0)$

$I_1 = I_2 = (E_0^1)^2$

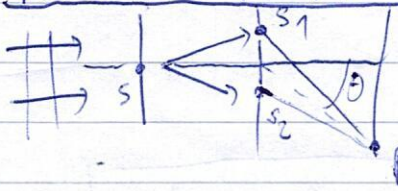
$$I = 2I_1 + \underbrace{(E_0^1)^2}_{=I_1} \cdot 2\cos(\Phi_2-\Phi_1)$$

$\delta := \Phi_2 - \Phi_1$

$\sin^2 + \cos^2$

$$\Rightarrow I = 2I_1\left(1 + \underbrace{\cos\delta}_{\cos^2\frac{\delta}{2} - \sin^2\frac{\delta}{2}}\right) \Rightarrow I = 4I_1\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

- YOUNGŮV EXPERIMENT



fáz. posuv

$\Phi = kz$ $\quad \Phi_1 = S_1P \cdot k$ $\quad \Phi_2 = S_2P \cdot k$ $\quad \delta = \Phi_2 - \Phi_1$

$$\delta = k\underbrace{(S_2P - S_1P)}_{=:\Delta}$$

$\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}$, když $\frac{\delta}{2} = k\pi$ bude max I (viz výše)

$\delta = 2k\pi$

- $\Rightarrow \frac{\Delta}{\lambda} = k$, $\Delta = k\lambda$; $k \in \mathbb{Z}$ – rovnice hyperboly } obecně

obdobně min. pro $\Delta = k\lambda + \frac{\lambda}{2}$

pro S_1, S_2 symetricky (viz obr):

$\sin\theta = \frac{\Delta}{a}$ $\quad tg\,\theta = \frac{y}{s}$

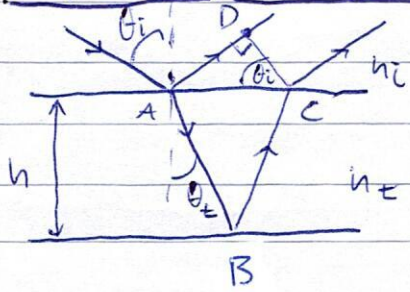
pro $y, a \ll s$ $\quad \sin\theta \approx tg\,\theta \approx \theta \Rightarrow \frac{y}{s} = \frac{\Delta}{a}$

$y = \frac{s\Delta}{a}$

$y = \frac{s}{a} \cdot \lambda k', \; k' \in Z$

ekvidistanty

INTERFERENCE NA TENKÝCH (DIEL.) VRSTVÁCH



změna fáze $\delta = k_2 - k_0 n_2$

zavedeme OPTICKOU DRÁHU $z_{OD} = z \cdot n$

$\Rightarrow \delta = z_{OD} k_0$

$z_{OD}^{AD} = AD \cdot n_i$

$z_{OD}^{ABC} = (AB + BC) \cdot n_t$

$\frac{AD}{AC} = \sin\theta_i$ $\quad \frac{AB}{h} = \frac{1}{\cos\theta_t}$ $\quad \frac{\frac{AC}{2}}{AB} = \sin\theta_t$

$\frac{\frac{AC}{2}}{h} = tg\,\theta_t$

$\Delta_{OD} = z_{OD}^{ABC} - z_{OD}^{AD} = 2n_t AB - n_i AD$

$\Delta_{OD} = 2n_t \frac{h}{\cos\theta_t} - n_i AC \sin\theta_i = 2n_t \frac{h}{\cos\theta_t} - n_i 2h\, tg\,\theta_t \sin\theta_i$

$= 2n_t h \cdot \frac{1}{\cos\theta_t} - 2n_t h\, tg\,\theta_t \sin\theta_t$

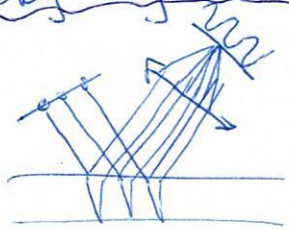
$= 2n_t h \frac{1}{\cos\theta_t}(1 - \sin^2\theta_t) = \boxed{2n_t h \cos\theta_t = \Delta_{OD}}$

$\boxed{\delta = \Delta_{OD} \cdot k_0}$, max. pro $\delta = k' \cdot 2\pi$ $\quad \Delta = k'\lambda$

min. pro $\delta = k' 2\pi + \pi$ $\quad \Delta = k'\lambda + \frac{\lambda}{2}$ $\quad k' \in Z$

ale pozor na změnu fáze při odrazu (viz Fresnel)

Proužky stejného sklonu



Proužky stejné tloušťky



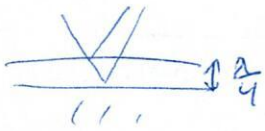


$\Delta_{OD} = 2 n_t t \cos\theta_t$

$\delta_{ODE} = \pi$

maximum: $2 n_t t \cos\theta_t + \frac{\lambda}{2} = 2k\varphi$

Antireflexní vrstvy



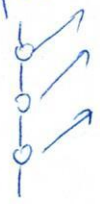
→ dojde k vyrušení

Vícesvazková interference

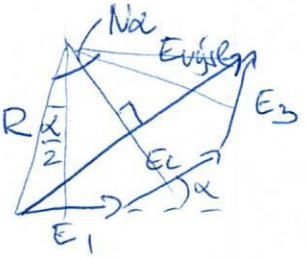
máme N vln, které vůči sobě mají stejný fázový posun

$E_1 = E_1 e^{i\alpha}$ $E_2 = E_1 e^{i2\alpha}$ $E_3 = E_1 e^{i3\alpha}$ ...

např.



$$E_{výsl} = \sum_{j=1}^{N} E_j$$



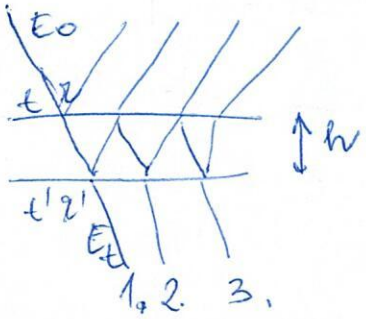
$$\sin\frac{N\alpha}{2} = \frac{\frac{E}{2}}{R}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{E_1}{2}}{R}$$

$$\frac{\sin\frac{N\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{E}{E_1}$$

$$\Rightarrow E_{výsl.} = E_1 \cdot \frac{\sin\frac{N\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad I \sim E^2 \sim E_1^2 \frac{\sin^2\frac{N\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

Mnohosvazková interference



r ... koeficient odrazu

t ... koeficient propustnosti

Stokesovy vztahy: $r = -r'$

$r^2 + tt' = 1.$

1. $E_0 \cdot t t' e^{i\delta_0}$
2. $E_0 \cdot t t' \cdot r'^2 \cdot e^{i\delta_0} \cdot e^{i\delta}$
3. $E_0 \cdot t t' \cdot r'^4 \; e^{i\delta_0} \cdot e^{i2\delta}$

...

Tedy $E = E_0 tt' e^{2i\delta_0} \left(1 + r'^2 e^{i\delta} + r'^4 e^{i2\delta} + \dots\right)$

$q = r'^2 e^{i\delta}$

$= E_0 tt' e^{2i\delta_0} \cdot \frac{1}{1 - r'^2 e^{i\delta}}$

$I_t = E^* E = |E_0|^2 (tt')^2 \cdot \frac{1}{1 - r'^2 e^{i\delta}} \cdot \frac{1}{1 - r'^2 e^{-i\delta}}$

$= \underbrace{|E_0|^2 (tt')^2}_{I_0} \frac{1}{1 + r'^4 - r'^2 e^{i\delta} + r'^2 e^{-i\delta}}$

$(1 - r'^2)^2 = (1 - R)^2$ $\quad r'^4 (e^{i\delta} + e^{-i\delta})$, $2\cos\delta$

$r'^2 = R$

$= I_0 \frac{(1-R)^2}{1 + R^2 - 2R\cos\delta} = I_0 \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 2R - 2R\cos\delta}$

$(1-R)^2 = 1 + R^2 - 2R$

$= I_0 \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 2R(1-\cos\delta)} = \boxed{I_0 \frac{1}{1 + 4R \cdot \frac{\sin^2\frac{\delta}{2}}{(1-R)^2}}}$

$1 - \cos\delta = \cos^2\frac{\delta}{2} + \sin^2\frac{\delta}{2} - \cos^2\frac{\delta}{2} + \sin^2\frac{\delta}{2}$

$= 2\sin^2\frac{\delta}{2}$

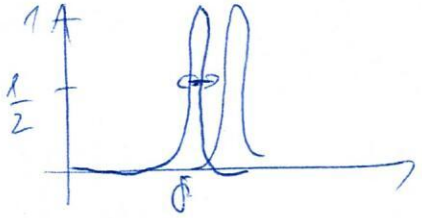
$\boxed{\frac{4R}{(1-R)^2} =: F}$ $\qquad$ $\boxed{I = I_0 \cdot \frac{1}{1 + F\sin^2\frac{\delta}{2}}}$

OSTROST $\qquad$ Airyho funkce

$\delta = k_0 \, 2 n_t h \cos\theta_t$

$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$

kolmý dopad: $\theta_t = 0$: $\quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2 n_t \cdot h$



podmínka $\frac{1}{2}$: $\quad F\sin^2\frac{\delta}{2} = 1$

$\frac{\delta^2}{4} = \frac{1}{F}$

$\delta = \frac{2}{\sqrt{F}}$

$\Delta\delta_{min} = 2\delta = \frac{4}{\sqrt{F}}$

$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2 h n_t \cdot \cos\theta_t$ $\quad \leftarrow$ ROZLIŠENÍ

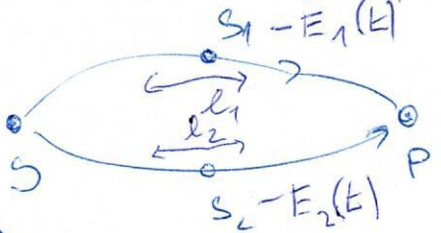
$\dots \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{F}} \cdot \frac{\lambda}{4 n_t h \cos\theta_t} = \frac{2}{\sqrt{F}} \cdot \frac{1}{4\pi n}$

Koherence světla

$\tilde{E} = E(t)$

$E = E_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \longrightarrow E_0 = E_0(t) \qquad \varphi = \varphi(t)$

„schopnost světla interferovat"



s_1, s_2 štěrbiny

$E_p(t) = E_1(t+\tau_1) + E_2(t+\tau_2)$

$I_p \propto \langle E_p^* E_p \rangle_t$

$\tilde{E}_p = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 \quad ; \quad \frac{l_1}{c} = \tau_1, \ \frac{l_2}{c} = \tau_2$

$\Rightarrow \tilde{E}_p = \tilde{E}_1(t-\tau_1) + E_2(t-\tau_2)$

$\Rightarrow I_p \propto \langle (\tilde{E}_1(t-\tau_1) + \tilde{E}_2(t-\tau_2))(\tilde{E}_1^*(t-\tau_1) + \tilde{E}_2^*(t-\tau_2)) \rangle_t$

$$I_p \propto \underbrace{\langle \tilde{E}_1(t-\tau_1)\tilde{E}_1^*(t-\tau_1)\rangle_t}_{I_1} + \underbrace{\langle \tilde{E}_2(t-\tau_2)\tilde{E}_2^*(t-\tau_2)\rangle_t}_{I_2} + \underbrace{\langle \tilde{E}_1(t-\tau_1)\tilde{E}_2^*(t-\tau_2)\rangle_t + \langle \tilde{E}_2(t-\tau_2)\tilde{E}_1^*(t-\tau_1)\rangle_t}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\{\underbrace{\langle \tilde{E}_1(t-\tau_1)\tilde{E}_2^*(t-\tau_2)\rangle_t}_{=:\tilde{\Gamma}_{12}}\}$$

není perioda

$=: \tilde{\Gamma}_{12}$ – (KOMPLEX.) KORELAČNÍ FUNKCE

$\boxed{\tilde{\Gamma}_{12} = \frac{1}{T'}\int_t^{t+T'} \tilde{E}_1(t-\tau_1)\tilde{E}_2^*(t-\tau_2)\,dt}$, bere se $T \to \infty$

$\tilde{\Gamma}_{12}(\tau_1, \tau_2)$, ale většinou máme stacionární statistický proces, tj. zaveďme $t' := t - \tau_1$,

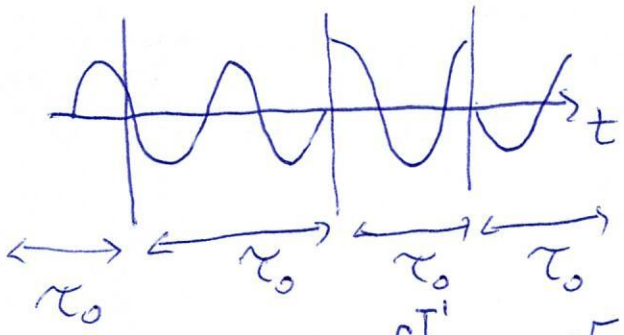
pak $t - \tau_2 = t + \tau_1 - \tau_2$ – $\tau := \tau_1 - \tau_2$

$\Rightarrow \tilde{\Gamma}_{12}(\tau) = \langle \tilde{E}_1(t) E_2^*(t+\tau) \rangle_t$

$\boxed{\tilde{\gamma}_{12}(\tau) := \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \tilde{\Gamma}_{12}}$ – (KOMPLEX.) STUPEŇ KOHERENCE

pak $I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\, \mathrm{Re}\{\tilde{\gamma}_{12}(\tau)\}$

Model:



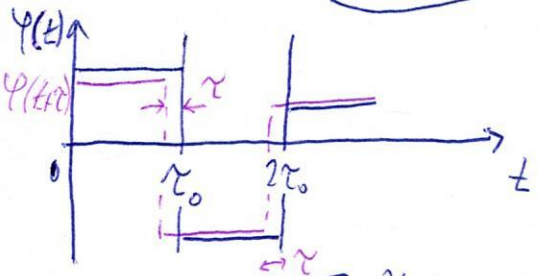
poli sdíle fáze

$\tilde{E}_1 = E_0 e^{-i[\omega t - \varphi(t)]}$

$\tilde{E}_2 = E_0 e^{-i[\omega(t+\tau) - \varphi(t+\tau)]}$

$$\Rightarrow \tilde{\gamma}_{12} = \frac{1}{I}\frac{1}{T'}\int_0^{T'} E_0^2 e^{i[\omega\tau + \varphi(t) - \varphi(t+\tau)]}\, dt$$

$$= e^{i\omega\tau}\underbrace{\frac{1}{T'}\int_0^{T'} e^{i(\varphi(t)-\varphi(t+\tau))}\, dt}_{=: P_1}$$



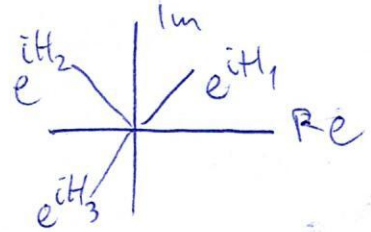
$[0, \tau_0 - \tau]$: $\varphi(t) - \varphi(t+\tau) = 0$

$[\tau_0 - \tau, \tau_0]$: $= H_1$

Beme $T' = N\tau_0$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{1}{N\tau_0}\left[\int_0^{\tau_0-\tau} e^{i0}\, dt + \int_{\tau_0-\tau}^{\tau_0} e^{iH_1}\, dt + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{N\tau_0}\left[N(\tau_0 - \tau) + \int_{\tau_0-\tau}^{\tau_0} \sum_{k=1}^{N} e^{iH_k}\, dt\right]$$



když jsou sholy náhodné, e^{iH_k} budou na všechny strany a v průměru se vyruší

$$\Rightarrow P_1 = \frac{1}{N\tau_0} N(\tau_0 - \tau) \Rightarrow \boxed{\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = e^{i\omega\tau}\frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_p = 2I + 2I\, Re\left\{ e^{i\omega\tau} \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0} \right\} = 2I + 2I \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0} \cos(\omega\tau)}$$

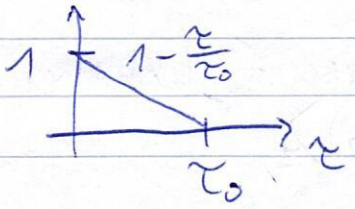
$\Delta l = l_2 - l_1$

$$\omega\tau = 2\pi\nu\tau = 2\pi \frac{c}{\lambda}\tau = 2\pi \frac{c}{\lambda}\frac{\Delta l}{c} = 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda} = k\Delta l$$

$k\Delta l = 2\pi \Rightarrow \Delta l = \frac{2\pi}{k}$

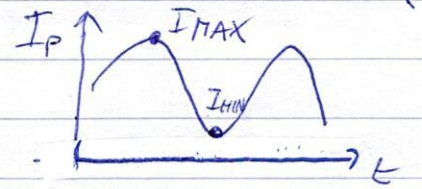
$\Rightarrow$ max pro $\omega\tau = 2\pi k$ – dostali jsme vztah jako u běžné interference lišící se o faktor $\frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0}$

$\frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0} = 1 - \frac{\tau}{\tau_0}$, tedy $\tau \in [0, \tau_0]$



ale $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| = \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0}$ a $Re\{\tilde{\gamma}_{12}(\tau)\} = \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0}\cos(\omega\tau)$

VIDITELNOST (INTERF. OBR.) – $\boxed{V := \frac{I_{MAX} - I_{MIN}}{I_{MAX} + I_{MIN}}}$



$$\Rightarrow V = \frac{2I + 2I|\tilde{\gamma}_{12}| - 2I + 2I|\tilde{\gamma}_{12}|}{2I + 2I|\tilde{\gamma}_{12}| + 2I - 2I|\tilde{\gamma}_{12}|} = \boxed{|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| = V}$$

z experimentu zjistíme V, tedy $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|$ a $\omega\tau$, tedy $Re\{\tilde{\gamma}_{12}(\tau)\}$

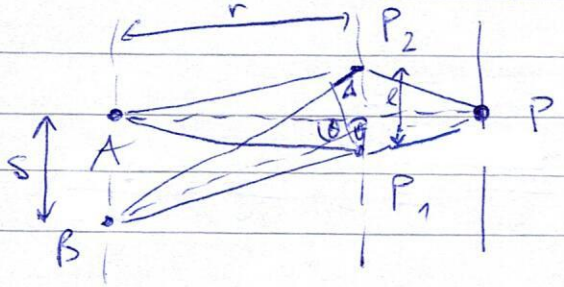
ZCELA KOHERENTNÍ – $\tau_0 \to \infty \Rightarrow |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| = 1$ – nejsou skoky

ZCELA NEKOHERENTNÍ – $\frac{\tau}{\tau_0} = 1 \Rightarrow |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| = 0$

posouvali jsme v čase, tj. řešili jsme ČASOVOU KOHER.

DÉLKA KOHERENCE $l_c = c\tau_0 \approx \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$

PROSTOROVÁ KOHER.



$\theta = \operatorname{tg}\theta = \frac{s}{r}$

$\theta = \sin\theta = \frac{\Delta}{\ell}$

$\frac{s}{r} = \frac{\Delta}{\ell}$, min. pro $\Delta = \frac{\lambda}{2}$

$\Rightarrow \frac{s}{r} = \frac{\lambda}{2\ell} \Rightarrow \boxed{s = \frac{r\lambda}{2\ell}}$ - KOHERENČNÍ ŠÍŘKA

- KOHERENTNÍ - $AB < s$

obecně se kombinuje prostorová a časová koherence

$\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2) = \langle \tilde{E}_1(\vec{r}_1, t_1)\, \tilde{E}_2^*(\vec{r}_2, t_2) \rangle_t$

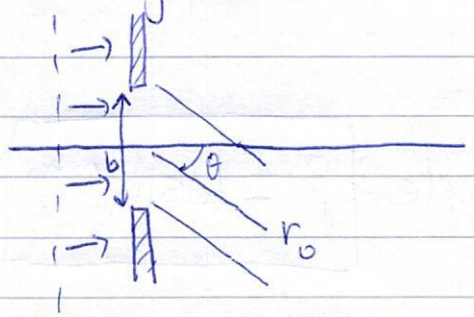
4. Difrakce (ohyb) světla

Huygensův princip:
Šíření vlny si lze představit tak, že v každém bodě vlny je zdroj, který šíří sekundární vlny, jejich součet určuje jak se šíří původní vlna.

Fresnelův princip:
Přidává interferenci sekundárních vln – správná představa.

FRAUNHOFEROVA APROXIMACE DIFRAKCE

uvažujeme rovinné vlny

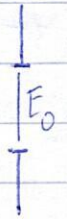


sledujeme v nekonečnu, fakticky tam dáme spojku

OKRAJOVÉ PODMÍNKY

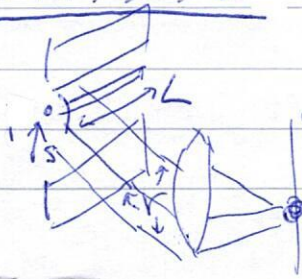
aproximace difrakce uvažuje její nezávislost na materiálu štěrbiny

KIRCHHOFFOVY OKRAJOVÉ PODMÍNKY:



$E = 0$ za štěrbinou
$E = E_0$ v mezeře

F.A.D. 2



$$dE_P = \frac{E_0 dS}{r} e^{-i(\omega t - kr)}, \quad dS = ds \cdot L$$

$$= \frac{E_L ds}{r} e^{-i(\omega t - kr)}$$

pro střední r_0: $r = r_0 + \Delta = r_0 + s \cdot \sin\theta$

$$\Rightarrow E_p = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{E_L}{(r_0+\Delta)} e^{-i(\omega t - k(r_0+\Delta))} ds$$

tady nemůžu vypustit: $k\Delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}$

předp. $r_0 \gg \Delta$

$$\Rightarrow E_p \approx \int_{-b/2}^{b/2} \frac{E_L}{r_0} e^{-i(\omega t - k(r_0+\Delta))}$$

$$\approx \frac{E_L}{r_0} e^{-i(\omega t - k r_0)} \underbrace{\int_{-b/2}^{b/2} e^{+iks\sin\theta} ds}_{=: P_1}$$

$$P_1 = \int_{-b/2}^{b/2} e^{iks\cdot\sin\theta} ds = \frac{1}{ik\sin\theta} \cdot \left[e^{ik\sin\theta\, b/2} - e^{-ik\sin\theta\, b/2} \right]$$

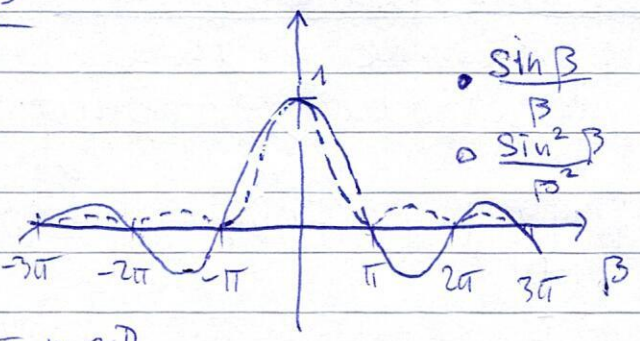
$$= \frac{1}{ik\sin\theta} \cdot 2i \sin\left(k\sin\theta \tfrac{b}{2}\right)$$

$$= \frac{2\sin(k\sin\theta\, b/2)}{k\sin\theta} = b\,\frac{\sin\beta}{\beta}, \text{ kde } \boxed{\beta := k\sin\theta\,\tfrac{b}{2}}$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{E_L}{r_0} e^{-i(\omega t - k r_0)} \cdot b\,\frac{\sin\beta}{\beta}$$

$$I_p = E_p E_p^* = \frac{E_L^2}{r_0^2} b^2 \frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_p = I_0 \cdot \frac{\sin^2\beta}{\beta^2}}$$



nuly pro $\sin\beta = 0 \Rightarrow \beta = m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$

max. pro $\frac{\sin\beta}{\beta}$