Matematická analýza

Zápisky z přednášky doc. Miroslava Zeleného

verze z 27. května 2026

Dominik Doležel

Obsah

Kapitola 1

Logika, množiny a základní číselné obory

1.1 Logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé), nebo že neplatí (je nepravdivé).

Příklad.

- Číslo čtyři je sudé. (pravda)
- Vídeň je hlavní město ČR. (nepravda)
- Ahoj! (není výrok)
- π^π je iracionální. (je výrok, ale nevíme, jestli je to pravda)

Definice 1. **Negací** $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

A	$\neg A$
0	1
1	0

Definice 2. **Konjunkcí** $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

Definice 3. **Disjunkcí** $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

Definice 4. **Implikací** $A \implies B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A.

Definice 5. **Ekvivalencí** $A \iff B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

(Platnost výroku) A je **nutnou a postačující** podmínkou (platnosti výroku) B.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Výroková forma V je výraz, který má konečný počet proměnných, přičemž když za tyto proměnné dosadíme prvky z daného oboru, obdržíme výrok.

Poznámka 1 (Vytváření nových výroků). Platí následující:

(i) $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$

(ii) $((A \wedge B) \wedge C) \iff (A \wedge (B \wedge C))$

(iii) $((A \vee B) \vee C) \iff (A \vee (B \vee C))$

(iv) $(\neg(A \implies B)) \iff (A \wedge \neg B)$

(v) $(\neg(A \vee B)) \iff (\neg A \wedge \neg B)$

(vi) $(A \iff B) \iff ((A \implies B) \wedge (B \implies A))$

Příklad. Výrok *Kočka leze dírou, pes oknem, nebude-li pršet, nezmoknem.* znegujeme jako *Kočka neleze dírou nebo pes neleze oknem nebo (nebude pršet a zmokneme).*

Definice 6. Nechť V je výroková forma s jednou proměnnou.

(i) Výrok „Pro každé x platí $V(x)$.“ symbolicky zapisujeme ve tvaru

$$\forall x : V(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným kvantifikátorem**.

(ii) Výrok „Existuje x takové, že platí $V(x)$.“ zapisujeme ve tvaru

$$\exists x : V(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním kvantifikátorem**.

Příklad. $V(x) : x < 3, x \in \mathbb{N}$ je výroková forma. $V(1), V(3)$ jsou výroky.

Označení (Kvantifikátor s podmínkou)**.** Nechť V, P jsou výrokové formy s jednou proměnnou a M je množina. Pak

$$\forall x \in M, P(x) : V(x)$$

znamená

$$\forall (x \in M \wedge P(x)) \implies V(x),$$

podobně

$$\exists x \in M, P(x) : V(x)$$

znamená

$$\exists x : (x \in M \wedge P(x) \wedge V(x)).$$

Poznámka 2 (Formule s více kvantifikátory)**.** Nechť V je výroková forma se dvěma proměnnými. Pak $V(x, y)$ je tedy výroková forma o dvou proměnných, $\exists x : V(x, y)$ je výroková forma o jedné proměnné (y) a $\forall y \, \exists x : V(x, y)$ je výrok.

Poznámka 3 (Negování formulí s kvantifikátory)**.** Nechť V je výroková forma s jednou proměnnou. Pak

$$\neg(\forall x : V(x)) = \exists x : \neg V(x),$$
$$\neg(\exists x : V(x)) = \forall x : \neg V(x).$$

Příklad. Určíme negaci výroku $\forall x \in M, P(x) : V(x)$. Je

$$\begin{aligned}
\neg(\forall x \in M, P(x) : V(x)) &\iff \neg(\forall x \in M \wedge P(x) \implies V(x)) \\
&\iff \exists x : \neg(x \in M \wedge P(x) \implies V(x)) \\
&\iff \exists x : x \in M \wedge P(x) \wedge \neg V(x) \\
&\iff \exists x \in M, P(x) : \neg V(x).
\end{aligned}$$

Poznámka 4 (Varování!)**.** Záleží na pořadí kvantifikátorů. Uvažme Z množinu žen, D množinu dětí a $M(z, d)$ výrokovou formu žena z je maminkou dítěte d. Pak srovnej

$$\forall d \in D \, \exists z \in Z : M(z, d), \qquad \exists z \in Z \, \forall d \in D : M(z, d).$$

1.2 Metody důkazů

- přímý důkaz: chceme $A \implies B$, k tomu dojdeme přes jednotlivé implikace $A \implies C_1 \implies \cdots \implies C_n \implies B$
- nepřímý důkaz: chceme $A \implies B$, dokazujeme $\neg B \implies \neg A$
- důkaz sporem: chceme $A \implies B$, předpokládáme negaci a dojdeme ke sporu
- důkaz rozborem případů: chceme $(A \vee B) \implies C$, dokazujeme $A \implies C \wedge B \implies C$

- důkaz matematickou indukcí: Nechť V je výroková forma s jednou proměnnou. Chceme dokázat, že $\forall n \in \mathbb{N} : V(n)$. Stačí dokázat
  1. $V(1)$
  2. $\forall n \in \mathbb{N} : (V(n) \implies V(n+1))$

1.3 Množiny

G. Cantor: „**Množinou** rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů, které nazýváme **prvky**, do jediného celku.“

Množinu definujeme výčtem prvků nebo pomocí vlastnosti, kterou musejí splňovat její prvky, tj. píšeme $\{x \in M; V(x)\}$, kde M je množina a V je výroková forma.

Pojmy *množina*, *prvek* a *býti prvkem* považujeme za primitivní pojmy.

Definice 7. Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme jej $A \subseteq B$. Množiny A a B jsou si rovny ($A = B$), jestliže mají stejné prvky. **Prázdnou množinou** nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem $\emptyset$.

Poznámka 5. $A \subseteq B$ připouští i $A = B$. Systémem množin rozumíme množinu množin.

Definice 8. **Sjednocením** množin A a B nazveme množinu tvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Značíme $A \cup B$.

Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

Definice 9. **Průnikem** množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Značíme $A \cap B$. Mají-li množiny A a B prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$.

Definice 10. **Rozdílem** množin A a B nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B. Značíme $A \setminus B$.

Definice 11. **Kartézským součinem** množin $A_1, \dots, A_n$ nazveme množinu všech uspořádaných n-tic
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, \dots, a_n];\ a_i \in A_i\}.$$

Věta 1 (de Morganova pravidla). *Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin. Pak platí*
$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}.$$

Důkaz.

- $\subseteq$ Předpokládejme, že $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$. Potom platí $x \in X$ a $x \notin \bigcup \mathcal{A}$, tzn. $\forall A \in \mathcal{A} : x \notin A$. Odtud máme, že $\forall A \in \mathcal{A}$ je $x \in X \setminus A$. Potom dostáváme $x \in \bigcap \{X \setminus A, A \in \mathcal{A}\}$.
- $\supseteq$ Předpokládejme, že $x \in \bigcap \{X \setminus A, A \in \mathcal{A}\}$. Pro každé $A \in \mathcal{A}$ platí $x \in X \setminus A$. Odtud plyne $x \in X$ a pro každé $A \in \mathcal{A}$ máme $x \notin A$. Potom $x \notin \bigcup \mathcal{A}$. Dostáváme $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$. □

1.4 Relace uspořádání a zobrazení

Definice 12. **Binární relací** rozumíme libovolnou množinu uspořádaných dvojic. Pokud R je binární relace a $[a, b] \in R$, pak říkáme, že prvek a je v relaci R s prvkem b. Často v tomto případě používáme zápis $a\,R\,b$.

Pokud binární relace R splňuje $R \subseteq A \times B$, pak říkáme, že R je **binární relací mezi prvky množin A a B**. Pokud $A = B$, pak říkáme, že R je **binární relací na A**.

Definice 13. Nechť X je množina a R je relace na X. Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže pro každé $x \in X$ platí $[x, x] \in R$,
- **symetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \in R$,
- **tranzitivní**, jestliže pro každé $x, y, z \in X$ splňující $[x, y] \in R$ a $[y, z] \in R$ platí $[x, z] \in R$,
- **antisymetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \notin R$,
- **slabě antisymetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ a $[y, x] \in R$ platí $x = y$.

Definice 14. Nechť R je relace na množině A. Řekneme, že R je na A

- **uspořádání** (někdy také částečné uspořádání či neostré uspořádání), jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní,
- **ostré uspořádání**, jestliže je antisymetrická a tranzitivní,
- **lineární uspořádání**, jestliže jde o uspořádání a pro každé $x, y \in A$ platí $[x, y] \in R$ nebo $[y, x] \in R$.

Příklad. Uvažujme množinu podmnožin $\mathbb{N}$ s relací $A \subseteq B$. To je uspořádání, ale není to lineární uspořádání.

Definice 15. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subseteq X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **maximálním** prvkem (**maximem**) množiny A, jestliže $x \in A$ a neexistuje $a \in A$ takové, že $x \leq a$ a $x \neq a$,
- **největším** prvkem množiny A, jestliže $x \in A$ a pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$.

Pojmy **minimální** prvek (**minimum**) množiny a **nejmenší** prvek množiny jsou definovány zřejmým způsobem.

Příklad. V množině $\{\{1\}, \{2\}, \emptyset\}$ uspořádané inkluzí jsou $\{1\}$ a $\{2\}$ maximální, ale množina nemá největší prvek.

Definice 16. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subseteq X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je dolní závorou množiny A,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

Definice 17. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $M \subseteq X$. Řekneme, že prvek $G \in X$ je **supremem** množiny M a značíme $\sup M$, jestliže platí:

1. G je horní závorou množiny M,
2. je-li prvek $G' \in X$ horní závorou množiny M, potom $G \leq G'$.

Řekneme, že prvek $g \in X$ je **infimem** množiny M a značíme $\inf M$, jestliže platí:

1. g je dolní závorou množiny M,
2. je-li prvek $g' \in X$ dolní závorou množiny M, potom $g' \leq g$.

Příklad. Supremum množiny $(0, 1)$ je 1.

Poznámka 6. Supremum a infimum jsou určeny jednoznačně, pokud existují (plyne ze slabé antisymetrie).

Poznámka 7. Má-li množina největší prvek, je to supremum.

Důkaz. Ať L je největší prvek množiny M.

(a) $L \in M, \forall x \in M : x \leq L \implies L$ je horní závora,

(b) Je-li G' horní závora M, pak $L \leq G'$, protože $L \in M$, tedy L je supremum množiny M.

$\square$

Věta 2. *Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X, $M \subseteq X$ je neprázdná množina a existuje infimum a supremum množiny M. Potom platí $\inf M \leq \sup M$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $M \neq \emptyset$. Nalezneme $a \in M$. Potom platí $\inf M \leq a$ a $a \leq \sup M$. Díky tranzitivitě máme $\inf M \leq \sup M$. □

Definice 18. Binární relaci F nazýváme **zobrazením**, pokud splňuje

$$\forall x \, \forall y_1 \, \forall y_2 : (([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F) \implies y_1 = y_2).$$

Řekneme, že zobrazení F je **zobrazení z množiny** A **do množiny** B, jestliže platí $F \subseteq A \times B$.

Označení. Je-li x takové, že existuje $y : [x, y] \in F$, je y určené jednoznačně a značíme ho $F(x)$.

Definice 19. Nechť F je zobrazení.

- **Definičním oborem** zobrazení F nazýváme množinu

  $$\mathcal{D}(F) = \{x; \exists y : [x, y] \in F\}.$$

  Pro $x \in \mathcal{D}(F)$ označujeme jednoznačně určený prvek y splňující $[x, y] \in F$ symbolem $F(x)$.

- **Oborem hodnot** zobrazení F nazýváme množinu

  $$\mathcal{H}(f) = \{y; \exists x : [x, y] \in F\}.$$

Označení. Nechť A a B jsou množiny a F je zobrazení.

(a) Pak symbol $F : A \to B$ znamená, že F je zobrazením z množiny A do množiny B a $\mathcal{D}(F) = A$. Takové zobrazení F nazýváme také **zobrazením množiny** A **do množiny** B.

(b) Pokud je $B = \mathbb{R}$, pak místo termínu zobrazení používáme termín **funkce**.

Poznámka 8. Graf F je $\{[x, F(x)], x \in \mathcal{D}(F)\}$.

Definice 20. Nechť A, B jsou množiny a f je zobrazení.

- **Obrazem množiny** A při zobrazení f rozumíme množinu

  $$\{y \in \mathcal{H}(f); \exists x \in \mathcal{D}(f) \cap A : f(x) = y\},$$

  kterou značíme $f(A)$.

- **Vzorem množiny** B při zobrazení f rozumíme množinu
$$\{x \in \mathcal{D}(f);\, f(x) \in B\},$$
kterou značíme $f^{-1}(B)$.

Definice 21. Řekneme, že zobrazení f

- je **prosté**, jestliže platí
$$\forall x, y \in \mathcal{D}(f) : f(x) = f(y) \implies x = y,$$
- je **na množinu** B, jestliže platí $\mathcal{H}(f) = B$,
- je **bijekcí množiny** A **na množinu** B, jestliže $\mathcal{D}(f) = A$ a jde o prosté zobrazení na B.

Definice 22. Nechť f je zobrazení a C je množina. Pak zobrazení definované předpisem $x \mapsto f(x)$, $x \in C \cap \mathcal{D}(f)$, nazýváme **restrikcí** nebo **zúžením** zobrazení f na množinu C a značíme jej $f|_C$.

Definice 23. Nechť f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením** (**složením zobrazení**) f a g, přičemž g nazýváme **vnějším** zobrazením a f nazýváme **vnitřním** zobrazením.

Definice 24. Nechť $f : A \to B$ je prosté zobrazení. Pak zobrazení $f^{-1} : f(A) \to A$ definované pro $y \in f(A)$ předpisem $f^{-1}(y) = x$, kde $x \in A$ je jednoznačně určeno vztahem $y = f(x)$, nazýváme **inverzním zobrazením** k zobrazení f.

Definice 25. Nechť A je neprázdná množina.

(a) **Konečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, do množiny A. Pokud $k \mapsto a_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme $\{a_k\}_{k=1}^n$. Prvek a_k nazýváme k-tým **členem** této posloupnosti.

(b) **Nekonečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny A. Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, případně jen $\{a_n\}$. Prvek a_n nazýváme n-tým **členem** této posloupnosti.

Poznámka 9. Posloupnost můžeme zadat

- explicitně: $a_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$,
- rekurentně: $a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + 4$.

1.5 Konečné a spočetné množiny

Definice 26.

(a) Řekneme, že množina A **má stejnou mohutnost** jako množina B, jestliže existuje bijekce A na B. Značíme $A \approx B$.

(b) Řekneme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou** mohutnosti množiny B, jestliže existuje prosté zobrazení A do B. Značíme $A \preceq B$.

(c) Řekneme, že množina A **má menší mohutnost** než množina B, jestliže existuje prosté zobrazení A do B a přitom A nemá stejnou mohutnost jako B. Značíme $A \prec B$. Říkáme taky, že A je **subvalentní** B.

Příklad. Ať $A = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \mathbb{N}$. Pak z $t : n^2 \mapsto n^2$ a $f : n^2 \mapsto n$ plyne $A \approx B$.

Definice 27. Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako $\{1, \dots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, pokud není konečná. Řekneme, že množina X je **spočetná**, jestliže je konečná, nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$. Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Poznámka 10. Pro počet prvků konečné množiny X používáme často značení $|X|$. Dvě konečné množiny X, Y mají stejnou mohutnost právě tehdy, když $|X| = |Y|$.

Věta 3 (Cantor-Bernstein)**.** *Nechť A, B jsou množiny takové, že $A \preceq B$ a zároveň $B \preceq A$. Pak A a B mají stejnou mohutnost.*

Věta 4 (Cantor)**.** *Nechť X je množina. Pak $X \prec \mathcal{P}(X)$, kde $\mathcal{P}(X)$ je množina všech podmnožin množiny X.*

Příklad. $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Věta 5 (Vlastnosti spočetných množin)**.**

(a) Podmnožina spočetné množiny je spočetná.

(b) Nechť zobrazení $f : A \to \mathbb{N}$ je prosté. Potom je množina A spočetná.

(c) Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.

(d) Obraz spočetné množiny je spočetná množina.

(e) Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.

1.6 Číselné obory

Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) a **násobení** ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností:

I. vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah,
  - $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),
  - $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
  - $\exists w \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} : w + x = x$ (prvek w je určen jednoznačně, značíme ho 0 a říkáme mu nulový prvek),
  - $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists z \in \mathbb{R} : x + z = 0$ (z je tzv. opačné číslo k číslu x, je určeno jednoznačně a značíme ho $-x$),
  - $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociativita násobení),
  - $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita násobení),
  - $\exists v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall x \in \mathbb{R} : v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme ho 1 a říkáme mu jednotkový prvek),
  - $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$ (prvek y je určen jednoznačně a značíme ho x^{-1}),
  - $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (distributivita).

II. vztah uspořádání a operací sčítání a násobení,
  - $\leq$ je lineární uspořádání,
  - $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \implies x + z \leq y + z$,
  - $\forall x, y \in \mathbb{R} : (0 \leq x \wedge 0 \leq y) \implies 0 \leq x \cdot y$.

III. vlastnost suprema: *Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.*

Věta 6. *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje infimum množiny M.*

Důkaz. Předpokládejme, že $M \subseteq \mathbb{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Definujeme

$$-M = \{-m, m \in M\}\,.$$

Množina $-M$ je neprázdná, protože M je neprázdná.

$-M$ je omezená shora. M je omezená zdola, takže nalezneme $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall x \in M : K \leq x$. Odtud plyne $\forall x \in M : -x \leq -K$. Prvek $-K$ je tedy horní závorou množiny $-M$, odkud máme, že $-M$ je shora omezená.

Podle vlastnosti suprema existuje $\sup(-M)$. Položme $g = -\sup(-M)$.

(a) $\sup(-M)$ je horní závorou $-M$, takže $g = -\sup(-M)$ je dolní závorou množiny M.

(b) Předpokládejme, že g' je dolní závorou množiny M. Potom $-g'$ je horní závorou množiny $-M$. Platí, že $\sup(-M) \leq -g'$. Odtud $g' \leq -\sup(-M) = g$. □

Věta 7. *Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.*

Důkaz. Dokazujeme sporem. Pak $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq x$, takže x je horní závorou množiny $\mathbb{N}$, a tedy $\mathbb{N}$ je shora omezená. Množina $\mathbb{N}$ je neprázdná, a proto podle vlastnosti suprema existuje supremum $\mathbb{N}$, které označíme jako G. Potom platí

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \leq G.$$

Odtud plyne $\forall n \in \mathbb{N} : n + 1 \leq G$, neboli $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq G - 1$. Číslo $G - 1$ je horní závorou množiny $\mathbb{N}$ a platí $G - 1 < G$, což je spor s definicí suprema. □

Věta 8. *Pro každé $r \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno číslo $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq r < k + 1$.*

Důkaz. Postupně dokážeme existenci a jednoznačnost.

Existence. Položme $M = \{n \in \mathbb{Z}, r < n\}$. Množina M je zdola omezená, neboť r je její dolní závorou. Podle věty 7 platí $M \neq \emptyset$. Podle věty 6 existuje infimum množiny M, které označíme g. Nalezneme $k' \in M$ takové, že $k' < g + 1$. Položme $k = k' - 1$. Platí $k \in \mathbb{Z}$, neboť $k' \in M \subseteq \mathbb{Z}$. Poněvadž $k' \in M$, máme $r < k' = k + 1$. Platí $k' - 1 < g$, a tedy $k' - 1 \notin M$. Máme tedy $k = k' - 1 \leq r$.

Jednoznačnost. Předpokládejme pro spor, že existují $k, j \in \mathbb{Z}, k \neq j$ taková, že $k \leq r < k + 1$ a $j \leq r < j + 1$. BÚNO $j < k$. Potom $0 < k - j < 1$, $k - j \in \mathbb{Z}$, což je spor. □

Označení. Celou část čísla r značíme $[r]$.

Věta 9. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $a < q < b$.*

Důkaz. Podle věty 7 nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n > \frac{1}{b - a}. \tag{1}$$

Položíme $q = \frac{[na]+1}{n}$. Potom $q \in \mathbb{Q}$ a

$$a = \frac{na}{n} < \frac{[na]+1}{n} \leq \frac{na+1}{n}.$$

Podle rovnice 1 máme $nb - na > 1 \iff nb > 1 + na$, a tedy $\frac{na+1}{n} < \frac{nb}{n} = b$. $\square$

Definice 28. **Množinu komplexních čísel** $\mathbb{C}$ definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic (a, b), kde $a, b \in \mathbb{R}$, přičemž pro komplexní čísla $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ definujeme operace **sčítaní** a **násobení** následovně:

- $x + y = (a + c, b + d)$,
- $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$.

Nechť $x = (a, b) \in \mathbb{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x, prvek b nazýváme **imaginární čásí** x. **Absulotní hodnotou** komplexního čísla x rozumíme $\sqrt{a^2 + b^2}$. Dále definujeme $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$ a $i = (0, 1)$. **Komplexně sdruženým číslem** k x rozumíme číslo $\bar{x} = (a, -b)$, symbol $-x$ značí číslo $(-a, -b)$ a symbol $1/x$ značí pro $x \neq 0$ (jednoznačně určené) číslo splňující $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

Kapitola 2

Limita posloupnosti

2.1 Úvod

Definice 29. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice 30. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí či klesající.

2.2 Vlastní limita posloupnosti

Definice 31. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Věta 10 (Jednoznačnost limity). *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, která má limitu rovnou $A \in \mathbb{R}$ a zároveň má limitu rovnou $B \in \mathbb{R}$. Potom platí $A = B$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K tomuto ε nalezneme nějaké n_0 takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Dále nalezneme $n_0' \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0' : |a_n - B| < \varepsilon.$$

Nalezneme $m \in \mathbb{N}$, které splňuje $m \geq n_0$ a $m \geq n_0'$. Potom platí

$$0 \leq |A - B| = |A - a_n + a_n - B| \leq |A - a_m| + |a_m - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Odtud plyne, že $|A - B| = 0$, neboli $A = B$. □

Označení. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu $A \in \mathbb{R}$, potom ji značíme $\lim_{n\to\infty} a_n$ nebo jen $\lim a_n$.

Definice 32. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **konverguje** (je **konvergentní**), jestliže existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$, neboli platí

$$\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Je-li posloupnost konvergentní, říkáme též, že má **vlastní limitu**. Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu, pak říkáme, že **diverguje** (je **divergentní**).

Lemma 1. *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že platí*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : |a_n - A| < K\varepsilon.$$

Důkaz.

$\Longleftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Položme $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{K}$. Podle předpokladu nalezneme pro $\tilde{\varepsilon}$ číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 : |a_n - A| < K\tilde{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Odtud plyne $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

$\Longrightarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Položme $\tilde{\varepsilon} = K\varepsilon$. Podle předpokladu nalezneme číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 : |a_n - A| < \tilde{\varepsilon} = K\varepsilon.$$

□

Příklad.

1. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a existuje $n^\star \in \mathbb{N}$ a $c \in \mathbb{R}$ taková, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n^\star : a_n = c$. Potom $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

   Zvolme $\varepsilon > 0$. Položme $n_0 = n^\star$. Potom $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ máme $|a_n - c| = |c - c| < \varepsilon$.

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

   Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ podle věty 7. Potom

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

   Sporem. Předpokládejme, že

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \, \forall n_0 \in \mathbb{N} \, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - 1| = |\sqrt[n]{n} - 1| \geq \varepsilon. \tag{2}$$

   Zafixujeme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ takové, že platí (2). Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{n=1}^\infty$ takovou, že

$$\forall k \in \mathbb{N} : |\sqrt[n_k]{n_k} - 1| \geq \varepsilon.$$

   Konstrukce $\{n_k\}_{k=1}^\infty$.

   - $k = 1$: Položme $n_0 = 1$ a použijme (2). Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ splňující $|\sqrt[n_1]{n_1} - 1| \geq \varepsilon$.
   - $k \rightsquigarrow k+1$: Již máme $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. Položme $n_0 = n_k + 1$ a použijeme (2). Nalezneme $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ splňující $n_{k+1} \geq n_0 > n_k$ a $|\sqrt[n_{k+1}]{n_{k+1}} - 1| \geq \varepsilon$. Pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ platí

$$\begin{aligned} |\sqrt[n_k]{n_k} - 1| &\geq \varepsilon \\ \sqrt[n_k]{n_k} - 1 &\geq \varepsilon \\ n_k &\geq (1+\varepsilon)^{n_k} \geq 1 + \binom{n_k}{1}\varepsilon + \binom{n_k}{2}\varepsilon^2 \\ n_k &\geq \binom{n_k}{2}\varepsilon^2 = \frac{1}{2}n_k(n_k - 1)\varepsilon^2. \end{aligned}$$

   Pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ platí

$$\begin{aligned} \frac{2}{\varepsilon^2} &\geq n_k - 1 \\ \frac{2}{\varepsilon^2} + 1 &\geq n_k \geq k \implies \mathbb{N} \text{ je shora omezená,} \end{aligned}$$

   což je spor.

4. Posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=1}^\infty$ není konvergentní.

Sporem. Předpokládejme, že existuje $A \in \mathbb{R}$ splňující $\lim_{n\to\infty}(-1)^n = A$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |(-1)^n - A| < \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Odtud plyne $A \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a zároveň $A \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, což je spor.

Věta 11. *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$. *Potom* $\lim |a_n| = |A|$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon.$$

Důkaz nerovnosti $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} |x| = |x - y + y| &\leq |x - y| + |y| \\ |x| - |y| &\leq |x - y|. \end{aligned}$$

□

Věta 12. *Nechť* $\{a_n\}$ *je konvergentní posloupnost. Potom je* $\{a_n\}$ *omezená.*

Důkaz. Hodnot před n_0 je konečně mnoho. Označme $A = \lim a_n$. Zvolme $\varepsilon = 1$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon = 1.$$

Množina $\{a_1, \ldots, a_{n_0}\}$ je konečná, a proto $\exists c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq n_0 : |a_n| \leq c.$$

Dále platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n| = |a_n + A - A| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|.$$

Položme $K = \max\{c, 1 + |A|\}$. Potom platí

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K,$$

odkud máme, že $\{a_n\}$ je omezená. □

Definice 33. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazýváme **vybranou posloupností** z posloupnosti $\{a_n\}$, případně **podposloupností** posloupnosti $\{a_n\}$.

Příklad. Ať $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Pak posloupnost $n_a = k^2, k \in \mathbb{N}$ je vybraná posloupnost: $\left\{\frac{1}{k^2}\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Věta 13. *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $n' \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geq n', n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon. \tag{3}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq n'$ platí $n_k \geq k \geq n'$. Potom $|a_{n_k} - A| < \varepsilon$ podle (3). □

Poznámka 11. Větu 13 lze užít k důkazu, že jistá posloupnost $\{a_n\}$ nemá limitu. Stačí nalézt dvě podposloupnosti z $\{a_n\}$ s rozdílnými limitami.

Věta 14 (Aritmetika limit)**.** *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$. Potom platí:*

(a) $\lim(a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(c) je-li $B \neq 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$, pak

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

Důkaz.

(a) Zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $n_A, n_B \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_A : |a_n - A| < \varepsilon, \\ &\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_B : |b_n - B| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{4}$$

Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Odtud dle lemmatu 1 plyne $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$.

(b) Posloupnost $\{b_n\}$ je konvergentní, a tedy omezená podle věty 12. Nalezneme $K \in \mathbb{R}, K > 0$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : |b_n| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $n_A, n_B \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_A &: |a_n - A| < \varepsilon, \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_B &: |b_n - B| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Vezměme $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Počítejme

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \\ &\leq |(a_n - A)b_n| + |A(b_n - B)| = |a_n - A| \cdot |b_n| + |A| \cdot |b_n - B| \\ &< \varepsilon K + |A| \cdot \varepsilon = \varepsilon(K + |A|), \end{aligned}$$

odkud máme podle lemmatu 1 $\lim a_n b_n = AB$.

(c) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &= \left|\frac{a_n B - AB + AB - Ab_n}{b_n B}\right| \\ &< \frac{|a_n B - AB| + |AB - Ab_n|}{|b_n B|} = \frac{|a_n - A| \cdot |B| + |A| \cdot |B - b_n|}{|b_n B|} \\ &= \frac{1}{|b_n|} \cdot |a_n - A| + \frac{|A|}{|b_n| \cdot |B|} \cdot |b_n - B|. \end{aligned} \tag{5}$$

Poněvadž $\lim b_n = B$ a $|B| > 0$, lze nalézt $n^\star \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n^\star : |b_n - B| < \frac{1}{2}|B|.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n^\star$ platí $|b_n| > \frac{1}{2}|B|$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $m^\star \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq m^\star : |a_n - A| < \varepsilon \wedge |b_n - B| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max\{m^\star, n^\star\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ podle (5) platí

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &\leq \frac{1}{|b_n|} \cdot |a_n - A| + \frac{|A|}{|b_n| \cdot |B|} \cdot |b_n - B| \\ &< \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot |B|} \cdot \varepsilon + \frac{|A|}{\frac{1}{2} \cdot |B| \cdot |B|} \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

odkud podle lemmatu 1 dostáváme $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$. □

Příklad.

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, neboť $\lim \frac{1}{n} = 0$ a $\lim \frac{1}{n^2} = \left(\lim \frac{1}{n}\right)^2$.

(2) Nechť $k \in \mathbb{N}$. Potom platí $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

(3) $\lim \frac{n-1}{n} = \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 + (-1) \cdot 0 = 1$.

Poznámka 12 (Varování!)**.** Vztah $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ obecní neplatí! Položme $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$, $\{b_n\} = \{(-1)\}^{n+1}$. Potom platí

$$\lim(a_n + b_n) = \lim 0 = 0,$$

ale $\lim a_n$ ani $\lim b_n$ neexistují.

Poznámka 13. Pokud změníme konečně mnoho členů posloupnosti, nebude to mít žádný vliv na existenci či neexistenci limity ani na její případnou hodnotu. Odtud plyne, že můžeme počítat limity „posloupností“, které jsou definovány na $\mathbb{N}$ vyjma konečné množiny.

Věta 15. *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Pak $\lim a_n b_n = 0$.*

Důkaz. Nalezneme $K \in \mathbb{R}, K > 0$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : |b_n| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon K,$$

odkud podle lemmatu 1 máme $\lim a_n b_n = 0$. □

Příklad. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin n = 0$.

Věta 16 (Limita a uspořádání)**.** *Nechť $A, B \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti splňující $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.*

(a) Nechť $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$.

(b) Nechť existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n^*$, platí $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.

Důkaz.

(a) Položme $\varepsilon = \frac{1}{4}(B - A)$. Nalezneme $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Podobně

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 : |b_n - B| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $a_n < A + \varepsilon$ a $A + \varepsilon < B - \varepsilon < b_n$.

(b) Sporem. Předpokládejme, že $A < B$. Podle (a) nalezneme n_0 takové, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$. Zvolme $n_1 = \max\{n_0, n^\star\}$. Potom platí $a_{n_1} < b_{n_1} \leq a_{n_1}$ z předpokladu, což je spor. □

Poznámka 14. V bodě A nelze uvažovat neostrou nerovnost místo ostré. Pak

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad b_n = 0 \qquad \lim a_n = 0 = \lim b_n.$$

Podobně v (b).

Věta 17 (O dvou strážnících). *Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:*

(a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$,

(b) $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou konvergentní a platí $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom je $\{c_n\}$ konvergentní a platí $\lim c_n = \lim a_n$.

Důkaz. Označme $\lim a_n = \lim b_n = A$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : |a_n - A| < \varepsilon,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : |b_n - A| < \varepsilon.$$

Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_2$ platí

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon,$$

tedy také $|c_n - A| < \varepsilon$. □

Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}, c > 0$. Potom platí $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

(1) $c \geq 1$: Platí $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{c} \geq 1$. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{c}.$$

Podle věty o dvou strážnících 17, vezmeme-li $a_n = 1, b_n = \sqrt[n]{n}, c_n = \sqrt[n]{c}$, dostaneme $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

(2) $0 < c < 1$: Je $\lim \sqrt[n]{c} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}}$, $\frac{1}{c} > 1$. Zbytek dostaneme z (a).

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice 34. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** ∞ (čteme plus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : a_n > K.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** $-\infty$ (čteme mínus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : a_n < K.$$

Má-li posloupnost limitu rovnou plus nebo mínus nekonečnu, říkáme, že **má nevlastní limitu**. Jestliže má posloupnost limitu rovnou ∞, pak říkáme, že **diverguje** k ∞. Jestliže má posloupnost limitu rovnou $-\infty$, pak říkáme, že **diverguje** k $-\infty$.

Příklad. Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} n = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Podle věty 7 nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > K$. Potom $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $n \geq n_0 > K$. Odtud plyne $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.

Označení. $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Věta 18 (Jednoznačnost limit podruhé)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, která má limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$ a zároveň má limitu rovnou $B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí $A = B$.*

Důkaz. Sporem. Předpokládejme, že $A \neq B$. BÚNO $A < B$. Rozlišíme následující případy:

(1) $A = -\infty, B \in \mathbb{R}$,

(2) $A = -\infty, B = \infty$,

(3) $A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$,

(4) $A \in \mathbb{R}, B = \infty$.

Ukážeme případ (1), v ostatních se postupuje analogicky. Zvolme $\varepsilon = 1$. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : |a_n - B| < \varepsilon = 1.$$

Zvolme $K = B - 1$. Nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$, takové že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 : a_n < K = B - 1.$$

Položme $m = \max\{n_1, n_2\}$. Pak platí $a_m < B - 1 < a_m$, což je spor. □

Poznámka 15. Označení. Symbol $\lim_{n\to\infty} a_n$ bude značit vlastní nebo nevlastní limitu posloupnosti $\{a_n\}$, pokud existuje. Někdy budeme používat jen symbol $\lim a_n$. Někdy také píšeme $a_n \to A, n \to \infty$.

Poznámka 16.

$$\lim a_n \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{je vlastní, tj. } \lim a_n \in \mathbb{R} \\ \text{je nevlastní, tj. } \lim a_n = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases} \end{cases} \\ \text{neexistuje} \end{cases}$$

Pokud má vlastní limitu, říkáme, že konverguje. V ostatních případech diverguje.

Poznámka 17 (Rozšířená reální osa $\mathbb{R}^\star$).

- uspořádání na $\mathbb{R}^\star$

  $$-\infty < \infty, \qquad \forall a \in \mathbb{R} : -\infty < a, \qquad \forall a \in \mathbb{R} < \infty,$$

  tedy $\leq$ na $\mathbb{R}^\star$ je lineární
- sčítání na $\mathbb{R}^\star$

  $$-(\infty) = -\infty, \qquad -(-\infty) = \infty, \qquad \forall a \in \mathbb{R} : a + \infty = \infty + a = \infty,$$

  obdobně pro

  $$\forall a \in \mathbb{R} : a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty.$$

  Výraz $\infty - \infty$ není definován.
- násobení na $\mathbb{R}^\star$

  $$\begin{aligned} &\forall a \in \mathbb{R}^\star, a > 0 : a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty, \\ &\forall a \in \mathbb{R}^\star, a < 0 : a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty, \\ &\infty^{-1} = 0, \quad (-\infty)^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Věta 19 (Aritmetika limit podruhé). *Nechť* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti,* $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^*$*. Potom platí:*

(a) $\lim(a_n + b_n) = A + B$*, pokud je výraz na pravé straně definován,*

(b) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$*, pokud je výraz na pravé straně definován,*

(c) je-li $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in N$*, pak* $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$*, pokud je výraz na pravé straně definován.*

Důkaz. Dokážeme případ (a), ostatní analogicky. Pokud $A, B \in \mathbb{R}$, pak znění plyne z věty 14. Díky komutativitě stačí dokázat tvrzení v následujících případech:

(i) $A = B = \infty$,

(ii) $A = \infty, B \in \mathbb{R}$,

(iii) $A \in \mathbb{R}, B = -\infty$,

(iv) $A = B = -\infty$.

Provedeme pouze důkaz případu (ii). Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Nalezneme $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : |b_n - B| < 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 : a_n > K - B + 1.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$a_n + b_n > (K - B + 1) + (B - 1) = K.$$

□

Poznámka 18. U zkoušky budou vyžadovány i zbývající části tohoto důkazu.

Příklad.

(1) $\lim n^2 = \lim(n \cdot n) = \infty \cdot \infty = \infty$,

(2) Nechť $a_n = n + \alpha$, $b_n = -n$. Pak $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = -\infty$, $\lim(a_n + b_n) = \alpha$, neboť je to konstantní posloupnost, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Poznámka 19. Platí následující. Nechť $\{a_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující

(a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $a_n \leq c_n$,

(b) $\lim a_n = \infty$.

Potom $\lim c_n = \infty$.

Věta 20. *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti splňující:*

- *pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$,*
- $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $A > 0$,
- $\lim b_n = 0$,
- *existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $b_n > 0$.*

Potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Důkaz. Rozlišíme dvě možnosti:

(1) $A \in \mathbb{R}, A > 0$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}A$. Potom $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : |a_n - A| < \varepsilon = \frac{1}{2}A,$$

tj. $a_n \in \left(\frac{1}{2}A, \frac{3}{2}A\right)$. Položme $L = \max\{K, 1\}$. Nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 : |b_n - 0| < \frac{\frac{1}{2}A}{L},$$

tj. $b_n \in \left(-\frac{A}{2L}, \frac{A}{2L}\right)$. Položme $n^* = \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n^*$ platí

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{\frac{1}{2}A}{b_n} > \frac{\frac{1}{2}A}{\frac{A}{2L}} = L \geq K.$$

(2) $A = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : a_n > 1.$$

Položme $L = \max\{K, 1\}$. Nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 : |b_n - 0| < \frac{1}{L}.$$

Položme $n^* = \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n^*$ platí

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{1}{b_n} > \frac{1}{\frac{1}{L}} = L \geq K,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka 20 (Supremum a infimum v $\mathbb{R}^*$). Musíme rozlišovat $(\mathbb{R}, \leq)$ a $(\mathbb{R}^*, \leq)$. V $\mathbb{R}^*$ platí $\sup \emptyset = -\infty$ a podobně $\inf \emptyset = \infty$. Je-li $M \subset \mathbb{R}$ a M není shora omezená, je $\sup M = \infty$ a podobně je-li $M \subset \mathbb{R}$ a M není zdola omezená, je $\inf M = -\infty$.

2.4 Hlubší věty o limitách

Věta 21. *Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost. Potom existuje $\lim a_n$. Je-li $\{a_n\}$ neklesající, pak $\lim a_n = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí, pak $\lim a_n = \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$.*

Důkaz. Položme $A = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ a předpokládejme, že $\{a_n\}$ je neklesající. Rozlišíme následující možnosti:

(i) $\{a_n\}$ není shora omezená. Potom $A = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > K$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$a_n \geq a_{n_0} > K.$$

(ii) $\{a_n\}$ je shora omezená. Potom $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Číslo $A - \varepsilon$, které je menší než A, není horní závorou množiny $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$a_{n_0} > A - \varepsilon$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$A - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq A < A + \varepsilon.$$

Odtud plyne $\lim a_n = A$.

Pokud je $\{a_n\}$ nerostoucí, lze postupovat analogicky, ale supremum je nahrazeno infimem. Je možné také přejít k posloupnosti $\{-a_n\}$. □

Poznámka 21. Z důkazu předchozí věty plyne, že pro monotónní posloupnost $\{a_n\}$ platí:

$$\{a_n\} \text{ je } \begin{cases} \text{neklesající} \begin{cases} \text{je shora omezená,} & \text{pak } \lim a_n \in \mathbb{R} \\ \text{není shora omezení,} & \text{pak } \lim a_n = \infty \end{cases} \\ \text{nerostoucí} \begin{cases} \text{je zdola omezená,} & \text{pak } \lim a_n \in \mathbb{R} \\ \text{není zdola omezená,} & \text{pak } \lim a_n = -\infty \end{cases} \end{cases}$$

Příklad. Nechť $q \in (0,1)$. Potom platí $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $q^n \geq q^{n+1} \geq 0$. Podle věty 21 existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} q^n = A$. Podle věty 16 platí $A \geq 0$.

$$A = \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \lim_{n\to\infty} q \cdot q^n = q \cdot A,$$

odtud plyne $A = 0$. Použili jsme větu 13. Pro úplnost uveďme ještě toto:

$$\lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} \infty & \text{pro } q > 1, \\ 1 & \text{pro } q = 1, \\ 0 & \text{pro } q \in (-1,1), \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1. \end{cases}$$

(a) $\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n} = \infty$ dle věty 20

(b) $\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

(c) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$, což konverguje k nule, takže i $-|q|^n$ konverguje k nule, a tedy $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

(d) $\lim_{n\to\infty} q^{2n} = \lim_{n\to\infty} (q^2)^n = \begin{cases} 1 & q = -1, \\ \infty & q < -1. \end{cases}$ Podobně $\lim_{n\to\infty} q^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} q \cdot (q^2)^n = \begin{cases} -1 & q = -1, \\ -\infty & q < -1 \end{cases}$

Věta 13 dává tvrzení.

Poznámka 22 (Varování)**.** V předchozím výpočtu je krok ověření existence limity podstatný.

Mějme posloupnost $a_1 = -1, a_{n+1} = -a_n$. Pak

$$\begin{aligned} \lim a_{n+1} &= \lim(-a_n) = -A \\ &= \lim a_n = A \\ &\implies \lim a_n = 0, \end{aligned}$$

ale tato limita neexistuje! Tento výpočet je špatně.

Věta 22 (Bolzano–Weierstrass). *Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost. Potom existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která je konvergentní.*

Důkaz. Nalezneme posloupnosti $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$ splňující:

(a) pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_k \leq \beta_k$,

(b) pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] = \left[\alpha_k, \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)\right] \qquad \text{nebo} \qquad [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] = \left[\frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k), \beta_k\right],$$

(c) pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí, že množina $\{j \in \mathbb{N}, a_j \in [\alpha_k, \beta_k]\}$ je nekonečná.

Konstrukce $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, takže nalezneme $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_1 \leq a_n \leq \beta_1.$$

Postupujeme indukcí. Předpokládejme, že již máme α_k, β_k. Množina

$$S = \{j \in \mathbb{N}, a_j \in [\alpha_k, \beta_k]\}$$

je nekonečná. Dále definujme

$$\begin{aligned} L &= \left\{j \in \mathbb{N}, a_j \in \left[\alpha_k, \frac{1}{2}(\alpha_k, \beta_k)\right]\right\}, \\ P &= \left\{j \in \mathbb{N}, a_j \in \left[\frac{1}{2}(\alpha_k, \beta_k), \beta_k\right]\right\}. \end{aligned}$$

Platí S je nekonečná a $S = L \cup P$. Potom L nebo P je nekončená. Pokud je L nekonečná, klademe $\alpha_{k+1} = \alpha_k$, $\beta_{k+1} = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)$. Pokud je L konečná, potom je P nekonečná a klademe $\alpha_{k+1} = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)$, $\beta_{k+1} = \beta_k$.

Limita pomocných posloupností. Z konstrukce plyne, že $\{a_k\}$ je neklesající a podobně $\{\beta_k\}$ je nerostoucí. Dále platí, že

$$\forall k \in \mathbb{N} : \alpha_1 \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq \beta_1.$$

Máme dvě monotónní posloupnosti, které jsou omezené, takže mají podle věty 21 limity

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_k = \alpha \in [\alpha_1, \beta_1],$$
$$\lim_{n\to\infty} \beta_k = \beta \in [\alpha_1, \beta_1].$$

Platí

$$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty} (\beta_k - \alpha_k) = \lim_{n\to\infty} (\beta_1 - \alpha_1) \cdot 2^{-k+1} = 0$$

Odtud plyne $\alpha = \beta$.

Konstrukce vybrané posloupnosti. Položme $n_1 = 1$. Konstrukce indukcí. Předpokládejme, že již máme přirozená čísla $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ a pro každé $j \in \mathbb{N}, j \leq k$ platí $a_{n_j} \in [\alpha_j, \beta_j]$. Budeme hledat n_{k+1}. Množina $\{i \in \mathbb{N}, a_i \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]\}$ je nekonečná podle (c). Potom i množina

$$\{i \in \mathbb{N}, i > n_0 \wedge a_i \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]\}$$

je nekonečná. Máme tedy nalézt $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k+1} > n_k$ a $a_{n_{k+1}} \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k,$$

ale α_k i β_k konvergují k α, takže podle věty o dvou strážnících platí

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = \alpha \in \mathbb{R},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Definice 35. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k, k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ shora omezená,} \\ \infty, & \text{jestliže není } \{a_n\} \text{ shora omezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k, k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{jestliže není } \{a_n\} \text{ zdola omezená.} \end{cases}$$

Poznámka 23.

(i) Definice 35 je korektní díky větě o limitě monotónní posloupnosti 21.

(ii) Místo $\limsup_{n\to\infty} a_n$ někdy píšeme $\overline{\lim}_{n\to\infty}$ a místo $\liminf a_n$ $\underline{\lim}_{n\to\infty}$.

Příklad.

(i) $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} = -1$.

(ii) $\limsup_{n\to\infty}(-n) = -\infty$, $\liminf_{n\to\infty}(-n) = -\infty$.

Věta 23 (Limita, limes superior a limes inferior)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.*

Důkaz.

$\Longrightarrow$

- $A \in \mathbb{R}$: Podle věty 12 je $\{a_n\}$ omezená. Označme $b_n = \sup\{a_k, k \geq n\}$, $c_n = \inf\{a_k, k \geq n\}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon.$$
Potom platí
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$
Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí
$$A - \varepsilon \leq c_n \leq b_n \leq A + \varepsilon.$$
Podle věty 16 plyne, že
$$A - \varepsilon \leq \underbrace{\lim c_n}_{\liminf a_n} \leq \underbrace{\lim b_n}_{\limsup a_n} \leq A + \varepsilon,$$
odkud plyne $\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = A$.
- $A = \infty$: $\{a_n\}$ není omezená shora, ale je omezená zdola. Dostáváme $\limsup a_n = \infty$ přímo z definice. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > K + 1.$$
Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí
$$c_n \geq K + 1 > K.$$
Je tedy $\liminf a_n = \lim c_n = \infty$.
- $A = -\infty$: Proveďte samostatně.

$\Longleftarrow$

- $A \in \mathbb{R}$: $\limsup a_n = \liminf a_n = A$. Zde máme, že $\{a_n\}$ je omezená posloupnost. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n, c_n \in \mathbb{R}$ a
$$c_n \leq a_n \leq b_n.$$
Protože c_n konverguje k $\liminf a_n = A$ a b_n k $\limsup a_n = A$, je podle věty o dvou strážnících 17 $\lim a_n = A$.

- $A = \infty$: $\{a_n\}$ není shora omezená, ale je zdola omezená. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \in \mathbb{R}$ a platí $c_n \leq a_n$. Protože c_n konverguje k $\liminf a_n = \infty$, je podle věty o dvou strážnících 17 i $\lim a_n = \infty$.
- $A = -\infty$: Samostatně. □

Věta 24. *Nechť $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti. Předpokládejme, že platí*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : x_n \leq y_n.$$

Potom $\limsup x_n \leq \limsup y_n$ *a* $\liminf x_n \leq \liminf y_n$.

Důkaz. Dokážeme jen druhou nerovnost, první se provede obdobně. Pokud $\{x_n\}$ není zdola omezená, potom $\liminf x_n = -\infty$ a dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $\{x_n\}$ je zdola omezená. Potom je zdola omezená i posloupnost $\{y_n\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$\inf \{x_k, k \geq n\} \leq \inf \{y_k, k \geq n\}.$$

Protože levá strana konverguje k $\liminf x_n$ a pravá k $\liminf y_n$, musí platit i $\liminf x_n \leq \liminf y_n$. □

Definice 36. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti a_n značíme $H(\{a_n\})$.

Příklad.

(i) $H(\{(-1)^n\}) = \{-1, 1\}$

(ii) $H(\{\sin n\}) = [-1, 1]$

Věta 25 (Limes superior, limes inferior a hromadné hodnoty)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Potom* $\limsup a_n, \liminf a_n \in H(\{a_n\})$ *a pro každé $y \in H(\{a_n\})$ platí* $\liminf a_n \leq y \leq \limsup a_n$.

Důkaz. Označme $A = \limsup a_n$. Rozlišíme následující případy:

(i) $A \in \mathbb{R}$: Označme $b_n = \sup \{a_k, k \geq n\}$. Potom platí $b_n \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\{b_n\}$ je nerostoucí posloupnost splňující $\lim b_n = A$. Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ a rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ takové, že $m_k \leq n_k$ a

$$|b_{m_k} - a_{n_k}| < \frac{2}{k}. \tag{6}$$

- $k = 1$: Položme $m_1 = 1$. Podle definice je $b_{m_1} = \sup \{a_k, k \geq m_1\}$. Nalezneme $n_1 \geq m_1$ splňující $b_{m_1} \geq a_{n_1} > b_{m_1} - \frac{2}{k}$.

- Indukční krok z k na $k+1$: Máme

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k,$$
$$m_1 < m_2 < m_3 < \cdots < m_k.$$

Nalezneme $m_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $m_{k+1} > n_k$:

$$b_{m_{k+1}} = \sup \{a_j, j \geq m_{k+1}\}.$$

Nalezneme n_{k+1} takové, že

$$b_{m_{k+1}} \geq a_{n_{k+1}} > b_{m_{k+1}} - \frac{2}{k+1}.$$

Pak podle (6) je

$$|b_{m_{k+1}} - a_{m_{k+1}}| < \frac{2}{k+1}.$$

Platí $\lim_{k\to\infty} b_{m_k} = A = \lim_{k\to\infty} \left(b_{m_k} - \frac{2}{k+1}\right)$, takže $\lim a_{n_k} = A$.

(ii) $A = \infty$: $\{a_n\}$ není shora omezená.

- $k = 1$: Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} > 1$.
- Indukční krok z k na $k+1$: Máme $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k$. Množina $\{a_j, j > n_k\}$ není shora omezená, takže nalezneme $n_{k+1} \in \mathbb{N}, n_{k+1} > n_k$ takové, že $a_{n_{k+1}} > k+1$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_k} > k$, ale k diverguje do ∞, takže podle věty o dvou strážnících 17 $\lim a_{n_k} = \infty$.

(iii) $A = -\infty$: $\{a_n\}$ není zdola omezená. Máme tedy $\liminf a_n = -\infty$. Podle věty o dvou strážnících 17 je $\lim a_n = -\infty$, a tedy $-\infty \in H(\{a_n\})$.

Důkaz nerovnosti pro $\liminf a_n$. Označme $y \in H(\{a_n\})$. Pokud $\liminf a_n = -\infty$, pak $\liminf a_n = -\infty \leq y$. Předpokládejme tedy, že $\liminf a_n > -\infty$. Potom platí

$$\liminf a_n = \lim_{n\to\infty} \inf \{a_k, k \geq n\}.$$

Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = y$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\inf \{a_j, j \geq n_k\} \leq a_{n_k}.$$

Protože a_{n_k} konverguje k y a $\inf \{a_j, j \geq n_k\}$ konverguje k $\liminf a_n$, platí $\liminf a_n \leq y$, což jsme chtěli dokázat. Pro limes superior postupujeme obdobně. □

Důsledek 1. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Potom je $H(\{a_n\})$ neprázdná.

Důkaz. $\limsup a_n \in H(\{a_n\})$ □

Definice 37 (Bolzanova–Cauchyova podmínka)**.** Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu–Cauchyovu podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Věta 26. *Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.*

Důkaz.

$\Longrightarrow$ Předpokládáme, že $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0$ platí

$$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |a_m - A|.$$

Pak podle (7) je

$$|a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Longleftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Podle BC podmínky nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Odtud plyne

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon.$$

Dále máme

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon.$$

Dostáváme tak, že $\limsup a_n, \liminf a_n \in \mathbb{R}$ a $0 \leq \limsup a_n - \liminf a_n \leq 2\varepsilon$. Platí tedy $\limsup a_n = \liminf a_n \in \mathbb{R}$, a tedy podle věty 23 existuje vlastní limita a_n. $\square$

Kapitola 3

Limita a spojitost funkce

3.1 Základní pojmy

Definice 38. **Funkce f jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice 39. Funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je **rostoucí** na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$ platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci **klesající** (**neklesající**, **nerostoucí**) na intervalu J.

Definice 40. **Monotónní funkcí** (resp. **ryze monotónní funkcí**) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J.

Definice 41. Nechť f je funkce a $M \subseteq \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická s periodou** $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $x + a \in \mathcal{D}(f)$, $x - a \in \mathcal{D}(f)$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$,
- **shora omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \le K$,
- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \ge K$,
- **omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \le K$,
- **konstantní** na M, jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$.

3.2 Limita funkce

Definice 42. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom **okolím bodu** c rozumíme každou množinu tvaru $B(c,\varepsilon) = (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. **Okolím** bodu ∞ rozumíme každou množinu tvaru $B(\infty,\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. **Okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každou množinu $B(-\infty,\varepsilon) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Definice 43. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom **prstencovým okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \setminus \{c\}$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a kterou značíme $P(c,\varepsilon)$. **Prstencovým okolím** bodu ∞ rozumíme každou množinu tvaru $\left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a kterou značíme $P(\infty,\varepsilon)$. **Prstencovým okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každou množinu tvaru $\left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a kterou značíme $P(-\infty,\varepsilon)$.

👁 Nechť $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*, c_1 \neq c_2$. Potom existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ takové, že $B(c_1,\varepsilon) \cap B(c_2,\varepsilon) = \emptyset$.

Definice 44. Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}^*$ je **limitou funkce f v bodě** $c \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P(c,\delta) : f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Věta 27. *Nechť funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$ a limitu $B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí $A = B$.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $A \neq B$. Nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ takové, že $B(A,\varepsilon) \cap B(B,\varepsilon) = \emptyset$. Nalezneme $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_1, \delta_2 > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta_1) : f(x) \in B(A,\varepsilon), \forall x \in P(c,\delta_2) : f(x) \in B(B,\varepsilon).$$

Položme $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Zvolme $z \in P(c,\delta_3)$. Potom platí $c \in P(c,\delta_1)$, a tedy $f(z) \in B(A,\varepsilon)$. Podobně máme $z \in P(c,\delta_2)$, a tedy $f(z) \in B(B,\varepsilon)$. Odtud plyne

$$f(z) \in B(A,\varepsilon) \cap B(B,\varepsilon) = \emptyset,$$

což je spor. □

Poznámka 24.

(1) Pokud existuje limita funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$, pak ji značíme symbolem $\lim_{x\to c} f(x)$.

(2) Pokud existuje $\lim_{x\to c} f(x)$, potom je f definována na jistém prstencovém okolí bodu c.

(3) Limitu funkce můžeme počítat ve vlastním bodě c, tj. $c \in \mathbb{R}$, nebo v nevlastním bodě c, tj. $c \in \{\infty, -\infty\}$. Výsledek může být opět vlastní nebo nevlastní.

(4) Nechť $c, A \in \mathbb{R}$. Potom platí, že $\lim_{x\to c} f(x) = A$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x-c| < \delta : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

(5) Nechť $c, A \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}, K > 0$. Potom $\lim_{x\to c} f(x) = A$ právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x-c| < \delta : |f(x) - A| < K\varepsilon.$$

Definice 45. Nechť $c \in \mathbb{R}$.

- **Pravým okolím** bodu c rozumíme každý interval $[c, c+\varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B^+(c,\varepsilon)$,
- **levým okolím** bodu c rozumíme každý interval $(c-\varepsilon, c]$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B^-(c,\varepsilon)$,
- **pravým prstencovým okolím** bodu c rozumíme každý interval $(c, c+\varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P^+(c,\varepsilon)$,
- **levým prstencovým okolím** bodu c rozumíme každý interval $(c-\varepsilon, c)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P^-(c,\varepsilon)$.

Pokračujme s definicí pro nevlastní hodnoty.

- **Pravým okolím bodu** $-\infty$ rozumíme každý interval $\left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B^+(-\infty,\varepsilon)$,
- **levým okolím bodu** ∞ rozumíme každý interval $\left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B^-(\infty,\varepsilon)$,
- **pravým prstencovým okolím bodu** $-\infty$ rozumíme každý interval $\left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P^+(-\infty,\varepsilon)$,
- **levým prstencovým okolím bodu** ∞ rozumíme každý interval $\left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P^-(\infty,\varepsilon)$.

Definice 46. Nechť $A \in \mathbb{R}^\star$, $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0\ \forall x \in P^+(c,\delta) : f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Poznámka 25. Věta 27 platí analogicky i pro limitu zleva a limitu zprava. Značení: $\lim_{x\to c_-} f(x)$, resp. $\lim_{x\to c_+} f(x)$.

Příklad.

- Nechť $c \in \mathbb{R}^*, A \in \mathbb{R}, \delta_0 \in \mathbb{R}, \delta_0 > 0$ splňují $\forall x \in P(c,\delta_0) : f(x) = A$. Potom $\lim_{x\to c} f(x) = A$.
- Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. Potom platí $\lim_{x\to c} x = c$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Položme $\delta = \varepsilon$. Potom platí $P(c,\delta) = P(c,\varepsilon) \subseteq B(c,\varepsilon)$, a tedy $\forall x \in P(c,\delta) : x \in B(c,\varepsilon)$.

👁 Nechť f, g jsou funkce, $c \in \mathbb{R}^*, \delta_0 \in \mathbb{R}, \delta_0 > 0$ a platí

$$\forall x \in P(c, \delta_0) : f(x) = g(x).$$

Potom $\lim_{x \to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když $\lim_{x \to c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*$.

Poznámka 26. Limita funkce v bodě má „lokální charakter“.

Definice 47. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** $c \in \mathbb{R}$, jestliže platí $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Poznámka 27. Funkce je spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \, \forall x \in B(c, \delta) : f(x) \in B(f(c), \varepsilon).$$

Definice 48. Řekneme, že funkce f je **spojitá zprava** (resp. **zleva**) v bodě $c \in \mathbb{R}$, jestliže platí

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c) \quad \text{(resp. } \lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)\text{)}.$$

Definice 49. Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Funkce $f \colon J \to \mathbb{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v každém bodě J, který není pravým koncovým bodem J,
- f je spojitá zleva v každém bodě J, který není levým koncovým bodem J.

Poznámka 28. Nechť $c \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^*$. Potom platí, že $\lim_{x \to c} f(x) = A$ právě tehdy, když $\lim_{x \to c_-} f(x) = A$ a $\lim_{x \to c_+} f(x) = A$.

Implikace $\implies$ je zřejmá. Implikace $\impliedby$: Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}, \delta_1 > 0$ takové, že

$$\forall x \in P_1(c, \delta_1) : f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Podobně nalezneme $\delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_2 > 0$ takové, že

$$\forall x \in P_2(c, \delta_2) : f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Položme $\delta_3 = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Potom máme

$$P(c, \delta_3) \subseteq P^+(c, \delta_1) \cup P^-(c, \delta_2).$$

Pro každé $x \in P(c, \delta_3)$ platí $f(x) \in B(A, \varepsilon)$.

3.3 Věty o limitách

Věta 28. *Nechť funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ vlastní limitu. Pak existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.*

Důkaz. Označme $A = \lim_{x \to c} f(x)$. Potom platí $A \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = 1$. K němu nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon)$, neboli

$$\forall x \in P(c, \delta) : f(x) \in (A - 1, A + 1).$$

Tedy f je omezená na $P(c, \delta)$. □

Věta 29 (Aritmetika limit)**.** *Nechť $A, B, c \in \mathbb{R}^\star$, $\lim_{x \to c} f(x) = A$ a $\lim_{x \to c} g(x) = B$. Potom platí:*

(a) $\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, pokud je výraz na pravé straně definován,

(b) $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = AB$, pokud je výraz na pravé straně definován,

(c) $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Důkaz.

(b) Případ $A, B \in \mathbb{R}$: Podle věty 28 nalezneme $K \in \mathbb{R}, K > 0$ takové, že existuje $\delta_0 \in \mathbb{R}, \delta_0 > 0$ splňující
$$\forall x \in P(c, \delta_0) : |f(x)| < K.$$
Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že platí
$$\forall x \in P(c, \delta_1) : |f(x) - A| < \varepsilon,$$
$$\forall x \in P(c, \delta_2) : |g(x) - B| < \varepsilon.$$
Položme $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$. Pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí
$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - AB| &= |f(x)g(x) - f(x)B + f(x)B - AB| \\ &\le |f(x)(g(x) - B)| + |(f(x) - A)B| \\ &< K\varepsilon + \varepsilon|B| = (K + |B|)\varepsilon. \end{aligned}$$
Odtud plyne $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = AB$.

(c) Případ $A = \infty, B \in \mathbb{R}, B > 0$. Potom $\frac{A}{B} = \infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že platí
$$\forall x \in P(c, \delta_1) : f(x) \in B\left(\infty, \frac{1}{2B}\varepsilon\right),$$
$$\forall x \in P(c, \delta_2) : g(x) \in B\left(B, \frac{1}{2}B\right).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pro každé $x \in P(c,\delta)$ platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{\frac{2B}{\varepsilon}}{\frac{3}{2}B} = \frac{4}{3\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon},$$

tj. $\frac{f(x)}{g(x)} \in B(\infty,\varepsilon)$. □

Poznámka 29. Věta 29 platí analogicky i pro jednostranné limity.

Důsledek 2. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a f, g jsou spojité funkce v bodě c. Potom také $f+g$ a fg jsou spojité v bodě c. Pokud navíc $g(c) \neq 0$, pak i funkce $\frac{f}{g}$ je spojitá v c.

Příklad. Funkce $x \mapsto c, x \in \mathbb{R}$ a $x \mapsto x, x \in \mathbb{R}$ jsou spojité na $\mathbb{R}$. Odtud a z důsledku 2 plyne, že každý polynom je spojitý v každém bodě z $\mathbb{R}$.

Věta 30. *Nechť $A \in \mathbb{R}^\star$, $A > 0$, $c \in \mathbb{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, $\lim_{x\to c} f(x) = A$ a existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c,\eta)$ platí $g(x) > 0$. Potom platí*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Důkaz. Rozlišíme dva případy

i. $A \in \mathbb{R}$: Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že

$$\forall x \in P(c,\delta_1) : |f(x) - A| < \frac{1}{2}A,$$
$$\forall x \in P(c,\delta_2) : |g(x) - 0| = |g(x)| < \frac{1}{2}A\varepsilon.$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Potom pro každé $x \in P(c,\delta)$ platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{\frac{1}{2}A}{\frac{1}{2}A\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon},$$

tj. $\frac{f(x)}{g(x)} \in B(\infty,\varepsilon)$. Potom tedy $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

ii. $A = \infty$: Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že

$$\forall x \in P(c,\delta_1) : f(x) \in B(\infty,\varepsilon),$$
$$\forall x \in P(c,\delta_2) : g(x) \in B(0,1).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Potom pro každé $x \in P(c,\delta)$ platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{1} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Odtud plyne $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. □

Věta 31 (Limita a uspořádání). *Nechť $c \in \mathbb{R}^\star$ a funkce f a g mají limity v c.*

(a) *Nechť*

$$\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x).$$

Pak existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta) : f(x) > g(x).$$

(b) *Nechť existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí*

$$\forall x \in P(c,\delta) : f(x) \le g(x).$$

Potom platí

$$\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x).$$

Důkaz. Označme $A = \lim_{x\to c} f(x), B = \lim_{x\to c} g(x)$.

(a) Nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ takové, že $B(A,\varepsilon) \cap B(B,\varepsilon) = \emptyset$. Potom pro každé $y_1 \in B(A,\varepsilon)$ a $y_2 \in B(B,\varepsilon)$ platí $y_1 > y_2$. Nalezneme $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že

$$\forall x \in P(c,\delta_1) : f(x) \in B(A,\varepsilon),$$
$$\forall x \in P(c,\delta_2) : g(x) \in B(B,\varepsilon).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$. Potom pro každé $x \in P(c,\delta)$ platí $f(x) \in B(A,\varepsilon), g(x) \in B(B,\varepsilon)$, a tedy $f(x) > g(x)$.

(b) Pro spor předpokládejme, že $A > B$. Podle již dokázaného bodu (a) nalezneme $\eta \in \mathbb{R}, \eta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c,\eta) : f(x) > g(x).$$

Zvolme $z \in P(c, \min\{\delta,\eta\})$. Potom platí

$$f(z) > g(z) \ge f(z),$$

což je spor. (Druhá nerovnost z předpokladu.) □

Věta 32 (O dvou strážnících). *Nechť $A \in \mathbb{R}^\star$, $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, a funkce f, g a h splňují:*

- $\forall x \in P(c,\eta) : f(x) \le h(x) \le g(x)$,
- $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = A$.

Potom existuje $\lim_{x\to c} h(x)$ a rovná se A.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1) : f(x) \in B(A, \varepsilon),$$
$$\forall x \in P(c, \delta_2) : g(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Potom pro každé $x \in B(c, \delta)$ platí $f(x), g(x) \in B(A, \varepsilon)$ a navíc $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, tedy $h(x) \in B(A, \varepsilon)$. Odtud plyne, že $\lim_{x \to c} h(x) = A$. □

Poznámka 30. Pokud $A = \infty$, stačí strážník f. Podobně pro $A = -\infty$.

Důsledek 3. Nechť $c \in \mathbb{R}^*, \lim_{x \to c} f(x) = 0$ a existuje $\eta \in \mathbb{R}, \eta > 0$ takové, že funkce g je na $P(c, \eta)$ omezená. Potom $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = 0$.

Důkaz. Nalezneme $K \in \mathbb{R}, K > 0$ takové, že $\forall x \in P(c, \eta) : |g(x)| < K$. Platí také $\lim_{x \to c} |f(x)| = 0$. Potom $\forall x \in P(c, \eta)$ platí

$$-K|f(x)| \leq f(x)g(x) \leq K|f(x)|.$$

Odtud podle věty o dvou strážnících máme $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = 0$. □

Věta 33 (Limita složené funkce). *Nechť $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^*$, f, g jsou funkce, $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$, $\lim_{y \to y_0} f(y)$ existuje a je splněna alespoň jedna z podmínek:*

(P) $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0\ \forall x \in P(x_0, \eta) : g(x) \neq y_0$,

(S) *f je spojitá v bodě y_0.*

Potom platí

$$\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{y \to y_0} f(y).$$

Důkaz. Označme $A = \lim_{y \to y_0} f(y)$. Chceme $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = A$.

(P) Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K nim nalezneme $\psi \in \mathbb{R}, \psi > 0$ takové, že

$$\forall y \in P(y_0, \psi) : f(y) \in B(A, \varepsilon).$$

K ψ nalezneme $\delta' \in \mathbb{R}, \delta' > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(x_0, \delta') : g(x) \in B(y_0, \psi).$$

Nechť $\eta \in \mathbb{R}, \eta > 0$ splňuje podmínku (P). Položme $\delta = \min\{\delta', \eta\}$. Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí $g(x) \in B(y_0, \psi)$ a $g(x) \neq y_0$, tedy $g(x) \in P(y_0, \psi)$. Odtud plyne $f(g(x)) \in B(A, \varepsilon)$.

(S) Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu díky (S) nalezneme $\psi \in \mathbb{R}, \psi > 0$ takové, že

$$\forall y \in B(y_0, \psi) : f(y) \in B(f(y_0), \varepsilon),$$

neboť $A = f(y_0)$. K ψ nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(x_0, \delta) : g(x) \in B(y_0, \psi).$$

Potom pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí $f(g(x)) \in B(f(y_0), \varepsilon) = B(A, \varepsilon)$. □

Důsledek 4. Jestliže je funkce g spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je spojitá v bodě $g(c)$, potom je funkce $f \circ g$ spojitá v bodě c.

Poznámka 31. Platí i varianty věty 33 pro jednostranné limity, např.: Nechť $x_0, y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-\infty\}$, f, g jsou funkce, $\lim_{x\to x_0^+} g(x) = y_0$, $\lim_{y\to y_0^+} f(y)$ existuje a je splněna alespoň jedna z následujících podmínke:

(P) $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0\, \forall x \in P_+(x_0, \eta) : g(x) > y_0$,

(S) f je spojitá v bodě y_0,

potom $\lim_{x\to x_0^+} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0^+} f(y)$.

Věta 34 (Heine). *Nechť $c, A \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) $\lim_{x\to c} f(x) = A$.

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující

- $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq c$ *a*
- $\lim_{n\to\infty} x_n = c$

platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Důkaz.

$\Longrightarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost splňující

- $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq c$,
- $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.

Chceme ukázat, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Díky (i) nalezneme k ε číslo $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

K δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : x_n \in B(c, \delta),$$

neboť $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Pak máme

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : x_n \in P(c, \delta).$$

Potom z předchozího plyne

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : f(x_n) \in B(A, \varepsilon).$$

Odtud $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

$\Longleftarrow$ Obměnou. Předpokládejme negaci (i):

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \, \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \, \exists x \in P(c, \delta) : \neg(f(x) \in B(A, \varepsilon)).$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ a podle $\neg$ (i) splňuje

$$\forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \, \exists x \in P(c, \delta) : \neg(f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in P\left(c, \frac{1}{n}\right)$ takové, že $\neg(f(x_n) \in B(A, \varepsilon))$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x_n \neq c$. Dále máme $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Zvolme $\tau \in \mathbb{R}, \tau > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{n_0} < \tau$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$x_n \in P\left(c, \frac{1}{n}\right) \subseteq P\left(c, \frac{1}{n_0}\right) \subseteq B(c, \tau).$$

Neplatí však $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $\neg(f(x_n) \in B(A, \varepsilon))$. $\square$

Poznámka 32. Lze formulovat varianty Heineovy věty, např.: Nechť $c \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní:

(i) f je spojitá zprava v bodě c,

(ii) pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující

- $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq c$,
- $\lim_{n\to\infty} x_n = c$,

platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

Příklad. Uvažujme funkci $f(x) = \sin \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Položme $x_n = \frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{N}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, n \in \mathbb{N}$. Platí $x_n \neq 0, y_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Navíc je

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(n\pi) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

tedy $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

Věta 35 (Limita monotónní funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f je monotónní funkce na intervalu (a, b). Potom existují $\lim_{x\to a^+} f(x)$ a $\lim_{x\to b^-} f(x)$, přičemž platí:*

(a) je-li f na (a,b) neklesající, pak

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf f((a,b)) \qquad a \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup f((a,b)),$$

(b) je-li f na (a,b) nerostoucí, pak

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \sup f((a,b)) \qquad a \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = \inf f((a,b)).$$

Důkaz.

(a) Označme $m = \inf f((a,b))$. Předpokládejme, že $m \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Podle definice infima není číslo $m+\varepsilon$ dolní závorou množiny $f((a,b))$. Nalezneme $x' \in (a,b)$ takové, že $m \le f(x') < m+\varepsilon$. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že $P^+(a,\delta) \subseteq (a,x')$. Potom pro každé $x \in P^+(a,\delta)$ platí, že $a < x < x'$, a tedy

$$m-\varepsilon < m \le f(x) \le f(x') < m+\varepsilon.$$

Potom máme $f(x) \in B(m,\varepsilon)$. Podobně postupujeme, pokud $m = -\infty$.

(b) Obdobně. □

3.4 Funkce spojité na intervalu

Věta 36 (Bolzano). *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že $f(\xi) = C$.*

Důkaz. Nechť $C \in (f(a), f(b))$. Položme $M = \{z \in [a,b], f(z) < C\}$. Množina M je neprázdná ($a \in M$) a shora omezená, neboť $M \subseteq [a,b]$. Označme $\xi = \sup M$ (používáme vlastnost suprema). Přivedeme ke sporu možnost, že $f(\xi) < C$ i $f(\xi) > C$.

(*i*) Pro spor předpokládejme, že $f(\xi) < C$. Platí tedy, že $\xi < b$. Funkce f je v ξ spojitá zprava. Podle věty 31 (a) nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in [\xi, \xi+\delta) : f(x) < C.$$

Potom máme, že $[\xi, \xi+\delta) \subseteq M$, což je spor.

(*ii*) Pro spor předpokládejme, že $f(\xi) > C$. Potom $\xi > a$. Funkce f je zleva spojitá v ξ. Podle věty 31 (a) nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (\xi-\delta, \xi] : f(x) > C.$$

Potom $M \subseteq [a, \xi-\delta]$, což je spor ($\xi - \delta < \xi$ a ξ je horní závora). □

Poznámka 33. Věta 36 platí i v případě, že $f(a) > f(b)$.

Lemma 2. *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ a platí*

$$\forall x, y \in M \ \forall z \in \mathbb{R}: \ x < z < y \implies z \in M.$$

Pak M je interval.

Důkaz. Pokud $M = \emptyset$, pak M je interval. Předpokládejme tedy, že $M \neq \emptyset$. Položme $a = \inf M, b = \sup M$. Ověříme, že interval $(a, b) \subseteq M \subseteq (a, b) \cup \{a, b\}$. Nejprve ověříme $(a, b) \subseteq M$. Zvolme $z \in (a, b)$. Nalezneme prvky $x, y \in M$ splňující $x < z$ a $z < y$. Podle podmínky ze znění máme $z \in M$. Nyní ověříme $M \subseteq (a, b) \cup \{a, b\}$. Zvolme $z \in M$. Potom $a \leq z \leq b$. Odtud plyne $z \in (a, b) \cup \{a, b\}$. □

Věta 37. *Nechť funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu J. Potom je $f(J)$ interval.*

Důkaz. Použijeme lemma 2. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$ a $z \in \mathbb{R}$ splňují $y_1 < z < y_2$. Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ takové, že $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. Podle věty 36 nalezneme $\xi \in (x_1, x_2)$ (resp. $\xi \in (x_2, x_1)$) splňující $f(\xi) = z$ (f je spojitá na J, a tedy i na $[x_1, x_2]$, resp. $[x_2, x_1]$). Máme tedy $z \in f(J)$. Podle lemmatu 2 je $f(J)$ interval. □

Věta 38. *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom je f na $[a, b]$ omezená.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že f není omezená shora. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in [a, b]$ takové, že $f(x_n) > n$. Díky Weierstrassově větě nalezneme vybranou posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^* \in [a, b]$. Z varianty Heineovy věty plyne $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*) \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N} : f(x_{n_k}) > n_k \geq k$. Odstud plyne $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$, což je spor. □

Poznámka 34. V důkazu věty 38 jsme užili následující variantu Heineovy věty: Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$. Pak je ekvivalentní:

(i) f je spojitá na I,

(ii) pro každé $c \in I$ a každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků intervalu I splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

Definice 50. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subseteq \mathcal{D}(f)$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) na M, jestliže platí

$$\forall y \in M : \ f(y) \leq f(x) \qquad\qquad (\text{resp. } \forall y \in M : \ f(y) \geq f(x)).$$

Bod x nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M. Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

Definice 51. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subseteq \mathcal{D}(f)$). Řekneme, že funkce f má v bodě x

- **lokální maximum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M$ platí $f(y) \leq f(x)$,
- **lokální minimum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M$ platí $f(y) \geq f(x)$.

Věta 39. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom f nabývá na $[a, b]$ svého maxima a svého minima.*

Důkaz. Dokážeme existenci maxima. Podle věty 38 je f omezená na intervalu $[a, b]$, a proto $G = \sup f([a, b])$ je prvkem $\mathbb{R}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in [a, b]$ splňující $f(x_n) > G - \frac{1}{n}$. Pomocí Weierstrassovy věty nalezneme vybranou posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} \in \mathbb{R}$. Potom platí, že $x^* = \lim x_{n_k} \in [a, b]$. Dále máme, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = G$, neboť

$$\forall n \in \mathbb{N} : G - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq G,$$

a tedy $\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = G$. Podle Heineovy věty máme, že $\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*)$. Odtud $f(x^*) = G$. □

Věta 40 (O inverzní funkci)**.** *Nechť f je spojitá a rostoucí (resp. klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (resp. klesjící) na intervalu $f(J)$.*

Důkaz. Funkce f je rostoucí, a tedy prostá. Funkce f^{-1} je tedy dobře definovaná na $f(J)$. Množina $f(J)$ je interval podle věty 37. Je-li f rostoucí (resp. klesající), pak je snadné ukázat, že f^{-1} je rostoucí (resp. klesající). Předpokládejme, že $y_0 \in f(J)$ není pravým koncovým bodem intervalu $f(J)$. Budeme dokazovat, že f^{-1} je spojitá zprava v bodě y_0. Označme $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Bod y_0 není pravý koncový bod $f(J)$, a tedy x_0 není pravý koncový bod J, neboť f je rostoucí. Nalezneme $x_1 \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \cap J$. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že $f(x_1) = y_0 + \delta$. Pak pro každé $y \in [y_0, y_0 + \delta)$ platí $x_0 = f^{-1}(y_0) \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_0 + \delta) = x_1$, takže $f^{-1}(y) \in [x_0, x_1) \subseteq B(x_0, \varepsilon) = B(f^{-1}(y_0), \varepsilon)$. Spojitost zleva v bodě, který není levým koncovým bodem $f(J)$, by se dokazovala analogicky. □

Kapitola 4

Elementární funkce

Věta 41. *Existuje právě jedna funkce* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující*

(E1) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y),$

(E2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$

4.1 Vlastnosti exponenciální funkce

(E3) $\underline{\exp(0) = 1}$

Podle (E1) platí $\exp(0) = \exp(0+0) = \exp(0) \cdot \exp(0)$, neboli $\exp(0) = \exp(0)^2$, tedy $\exp(0)$ je buď 0 nebo 1. Kdyby $\exp(0) = 0$, potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\exp(x) = \exp(x+0) = \exp(x) \cdot \exp(0) = 0,$$

což je spor s (E2).

(E4) $\underline{\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) \cdot \exp(-x) = 1}$

Pro $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x).$$

(E5) $\underline{\forall n \in \mathbb{Z}\, \forall x \in \mathbb{R} : \exp(nx) = \exp(x)^n}$

- $n = 0$: pro $x \in \mathbb{R}$ je $\exp(0 \cdot x) = \exp(0) = 1 = \exp(x)^0$
- $n \rightsquigarrow n+1$: pro $x \in \mathbb{R}$ je

$$\begin{aligned} \exp((n+1)x) &= \exp(nx + x) = \exp(nx) \cdot \exp(x) = \exp(x)^n \cdot \exp(x) \\ &= \exp(x)^{n+1} \end{aligned}$$

- $n \in \mathbb{Z}, n < 0$: pro $x \in \mathbb{R}$ je

$$\exp(nx) = \exp(-(-nx)) = \frac{1}{\exp(-nx)} = \frac{1}{\exp(x)^{-n}} = \exp(x)^n$$

(E6) $\underline{\forall x \in (0,\infty) : \exp(x) > 1}$

Z vlastnosti (E2) plyne, že existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že

$$\forall z \in (0,\delta] : \exp(z) - 1 > 0.$$

Položme $k = [\frac{x}{\delta}]$. Potom můžeme psát

$$x = k\delta + z, \quad z \in [0,\delta).$$

Potom máme

$$\exp(x) = \exp(k\delta + z) = \exp(k\delta) \cdot \exp(z) = \underbrace{\exp(\delta)^k}_{>1 \text{ pro } k \geq 1} \cdot \exp(z) > 1,$$

pokud $k = 0$, pak $z > 0$.

(E7) $\underline{\forall x \in (-\infty,0) : \exp(x) \in (0,1)}$

Plyne z (E4) a (E6).

(E8) $\underline{\exp \text{ je rostoucí na } \mathbb{R}}$

Zvolme $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. Položme $k = y - x$. Potom $k > 0$ a platí

$$\exp(y) = \exp(x + k) = \underbrace{\exp(x)}_{>0} \cdot \underbrace{\exp(k)}_{>1} > \exp(x).$$

(E9) $\underline{\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty}$

Podle věty 35 (a) $\lim_{x\to\infty} \exp(x)$ existuje, neboť exp je rostoucí. Podle Heineovy věty platí, že $\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \lim_{x\to\infty} \exp(x)$. Navíc máme

$$\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \lim_{n\to\infty} (\exp(1))^n = \infty, \quad \text{(E6)} \implies \exp(1) > 1.$$

(E10) $\underline{\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0}$

Plyne z (E9) a (E4):

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\exp(-x)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$g(x) = x \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$$

$$f(y) = \exp(y) \qquad \lim_{y\to\infty} f(y) = \infty$$

je splněna podmínka (P)

(E11) exp je spojitá na $\mathbb{R}$

spojitá v 0:

$$\lim_{x\to 0} \exp(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\exp(x) - 1}{x} \cdot x + 1 \right) = 1 \cdot 0 + 1 = 1 = \exp(0)$$

spojitá na $c \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to c} \exp(x) = \lim_{x\to c} \exp(x - c + c) = \lim_{x\to c} \exp(x - c) \cdot \exp(c) = 1 \cdot \exp(c) = \exp(c)$$

(E12) $\mathcal{H}(\exp) = (0, \infty)$

Díky větě 37 a (E11) máme, že $\mathcal{H}(\exp) = \exp(\mathbb{R})$ je interval. Víme, že platí $\mathcal{H}(\exp) \subseteq (0, \infty)$. Z (E9) a (E10) plyne $\mathcal{H}(\exp) = (0, \infty)$.

Označení. Eulerovo číslo $e = \exp(1)$.

Definice 52.

(a) Funkce $\log\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ je definována jako inverzní funkce k funkci exp. Nazývá se **přirozeným logaritmem**.

(b) Je-li $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, pak definujeme $\log_a\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

(c) Nechť $a \in \mathbb{R}, a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$. Potom definujeme reálné číslo a^b předpisem $a^b = \exp(b \log a)$.

(d) Nechť $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Potom funkci $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme **obecnou mocninou**.

4.2 Vlastnosti logaritmu

(L1) $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$

Platí totiž $\mathcal{H}(\exp) = (0, \infty)$.

(L2) $\mathcal{H}(\log) = \mathbb{R}$

Platí totiž $\mathcal{D}(\exp) = \mathbb{R}$.

(L3) $\log(1) = 0$

Je totiž $\exp(0) = 1$.

(L4) $\underline{\forall x, y \in (0, \infty) : \log(xy) = \log x + \log y}$

Pro $x, y \in (0, \infty)$ označme $a = \log x, b = \log y$. Potom

$$\log(xy) = \log(\exp(a)\exp(b)) = \log(\exp(a+b)) = a + b = \log x + \log y.$$

(L5) $\underline{\forall x \in (0, \infty) : \log \frac{1}{x} = -\log x}$

Platí

$$0 = \log(1) = \log\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \log(x) + \log\left(\frac{1}{x}\right),$$

odkud máme $\log \frac{1}{x} = -\log x$.

(L6) $\underline{\forall n \in \mathbb{Z}\, \forall x \in (0, \infty) : \log(x^n) = n \log x}$

- $n = 0$: platí
- $n \rightsquigarrow n+1 : (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}), x \in (0, \infty)$

$$\log(x^{n+1}) = \log(x^n \cdot x) = \log(x^n) + \log(x) = n \log x + \log x = (n+1) \log x.$$

- $n \in \mathbb{Z}, n < 0 : x \in (0, \infty)$

$$\log(x^n) = \log\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\log(x^{-n}) = (-1) \cdot (-n) \cdot \log x = n \log x.$$

(L7) $\underline{\log \text{ je rostoucí na } (0, \infty)}$

exp je rostoucí na $\mathbb{R}$

(L8) $\underline{\lim_{x\to\infty} \log x = \infty}$

Z věty o limitě monotónní funkce, faktu že log je rostoucí a toho, že $\mathcal{H}(\log) = \mathbb{R}$ plyne, že $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$.

(L9) $\underline{\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty}$

Podobně jako v (L8).

(L10) $\underline{\log \text{ je spojitá na } (0, \infty)}$

Plyne ze spojitosti exp, (E5) a věty 40.

(L11) $\underline{\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1}$

Vezměme si

$$f(y) = \frac{\exp(y) - 1}{y} \qquad \lim_{y\to 0} f(y) = 1$$

$$g(x) = \log x \qquad \lim_{x\to 1} g(x) = 0 \text{ je splněna podmínka (P),}$$

odkud máme

$$\lim_{x\to 1} f\circ g(x) = 1,$$

tedy že

$$\lim_{x\to 1} \frac{\exp(\log x) - 1}{\log x} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\log x} = 1.$$

Poznámka 35.

(i) Pro $a \in \mathbb{R}, a > 0, n \in \mathbb{Z}$ je

$$a^n = \exp(n\log a) = \exp(\log(a^n)) = a^n,$$

tedy definice obecné mocniny je kompatibilní s (L6).

(ii) Pro $n \in \mathbb{N}$ je funkce

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

- pro n sudé rovna inverzní funkci k $f(x) = x^n, x \in [0,\infty)$,
- pro n liché rovna inverzní funki k $h(x) = x^n, x \in \mathbb{R}$.

Platí $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ je spojitá na svém definičním oboru (podle věty 40).

Věta 42 (Základní vlastnosti sinu a kosinu)**.** *Existuje právě jedno kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a právě jedna dvojice funkcí* ***sinus*** (sin) *a* ***kosinus*** (cos)*, které mají následující vlastnosti:*

(G1) pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin(x+y) = \sin x\, \cos y + \cos x\, \sin y,$$

(G2) pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\cos(x+y) = \cos x\, \cos y - \sin x\, \sin y,$$

(G3) sin *je lichá a* cos *je sudá funkce,*

(G4) sin *je rostoucí na* $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(0) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,

(G5) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

4.3 Vlastnosti sinu a kosinu

(G6) $\underline{\cos(0) = 1}$

Zvolme $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Podle (G1) platí

$$\sin x = \sin(x + 0) = \sin x \cos 0 + \cos x \sin 0 = \sin x \cos 0,$$

a protože $\sin x \neq 0$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, je

$$\cos 0 = 1.$$

(G7) $\underline{\forall x \in \mathbb{R} : \sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

Platí

$$1 = \cos(0) = \cos(x - x) = \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x) = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

(G8) $\underline{\forall x \in \mathbb{R} : |\sin x| \leq 1 \wedge |\cos x| \leq 1}$

Plyne z (G7).

(G9) $\underline{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0}$

Podle (G7) máme

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

ale $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ je podle (G4) rovno 1, takže

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \implies \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

(G10) $\underline{\forall x \in \mathbb{R} : \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x}$

Z (G1) a (G9) plyne

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos x \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

(G11) $\underline{\forall x \in \mathbb{R} : \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x}$

Z (G2) plyne

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} - \sin x \sin\frac{\pi}{2} = -\sin x.$$

(G12) sinus a kosinus jsou 2π periodické

Z (G10) a (G11) plyne

$$\begin{aligned}\sin(x+2\pi) &= \sin\left(x+\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)\\ &= -\sin(x+\pi) = -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin x.\end{aligned}$$

$\cos(x+2\pi) = \cos x$ analogicky.

(G13) <u>sinus a kosinus jsou spojité na $\mathbb{R}$</u>

- sinus je spojitý v nule:

$$\lim_{x\to 0}\sin x = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot x = 1\cdot 0 = 0 = \sin 0.$$

- kosinus je spojitý v nule:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 1-2\cdot 0^2 = 1 = \cos 0.\end{aligned}$$

- spojitost sinu v $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\sin x &= \lim_{x\to x_0}\sin\left((x-x_0)+x_0\right)\\ &= \lim_{x\to x_0}\left(\sin(x-x_0)\cos x_0+\cos(x-x_0)\sin x_0\right)\\ &= 0\cdot\cos x_0+\cos 0\cdot\sin x_0 = \sin x_0.\end{aligned}$$

- spojitost kosinu v $x_0 \in \mathbb{R}$: obdobně s pomocí (G2)

(G14) <u>$\{x\in\mathbb{R}, \sin x = 0\} = \{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ a $\{x\in\mathbb{R}, \cos x = 0\} = \{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$</u>

Platí

$$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right): \sin x > 0 \qquad\qquad \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right): \sin x < 0.$$

Dále pro $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ je

$$\sin x = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x-\pi).$$

Podobně když $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, máme $\sin x = -\sin(x-\pi)$. Odtud dostáváme, že nulové body jsou právě v $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ a $\frac{3\pi}{2}$. Pro kosinus dostaneme z (G11) posunutím o $\frac{\pi}{2}$.

Definice 53. Funkce **tangens** (značíme ji tg) a **kotangens** (značíme ji cotg) definujeme předpisy

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x) &= \frac{\sin x}{\cos x}, & x &\in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}, \\ \operatorname{cotg}(x) &= \frac{\cos x}{\sin x}, & x &\in \mathbb{R} \setminus \{ k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \}. \end{aligned}$$

Goniometrickými funkcemi rozumíme $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{cotg}$.

Definice 54. Cyklometrické funkce **arkussinus** (arcsin), **arkuskosinus** (arccos), **arkustangens** (arctg) a **arkuskotangens** (arccotg) definujeme následovně:

$$\begin{aligned} \arcsin &= \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1}, \\ \arccos &= \left(\cos|_{[0,\pi]} \right)^{-1}, \\ \operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1}, \\ \operatorname{arccotg} &= \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Věta 43. *Funkce* log, exp, sin, cos, tg, cotg, arcsin, arccos, arctg *a* arccotg *jsou spojité na svých definičních oborech.*

Důkaz. Spojitosti funkcí log, exp, sin, cos jsme již dokázali. Funkce tg a cotg dostaneme pomocí věty o artimetice limit. Zbývá tedy dokázát spojitost funkcí arcsin, arccos, arctg, arccotg. To dostaneme podle věty 40. □

Kapitola 5

Derivace

5.1 Definice a základní vztahy

Definice 55. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Existuje-li limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak její hodnotu nazýváme **derivací** funkce f v bodě a. Obdobně definujeme **derivaci zprava** a **derivaci zleva** funkce f v bodě a předpisy

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \qquad \lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Derivaci zleva v bodě a derivaci zprava v bodě nazýváme **jednostrannými derivacemi**.

Označení. Pokud derivace existuje, je určena jednoznačně (důsledek věty 27). Používáme značení $f'(a)$, $f'_+(a)$, $f'_-(a)$.

Poznámka 36.

i. Derivace

$$f'(a) \begin{cases} \text{existuje,} \\ \text{neexistuje} & \begin{cases} \text{je vlastní, tj. } \in \mathbb{R}, \\ \text{je nevlastní} & \begin{cases} \infty, \\ -\infty. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

ii. $f'(a) \implies \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 : f$ je definována na okolí $B(a, \delta)$

iii. $f'(a) = A \in \mathbb{R}^* \iff f'_+(a) = f'_-(a) = A \in \mathbb{R}^*$

iv. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

v. Derivace je lokální pojem.

Poznámka 37 (Derivace a tečna)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, f je funkce a $f'(a) \in \mathbb{R}$. Tečnou ke grafu f v bodě $[a, f(a)]$ rozumíme funkci

$$t : x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a).$$

Platí

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} \\ &= \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0.\end{aligned}$$

Poznámka 38. Definičním oborem derivace funkce f rozumíme množinu $\{x \in \mathbb{R}, f'(x) \in \mathbb{R}\}$.

Příklad.

i. $f(x) = c, c \in B(a, \delta)$, kde $\delta > 0, a \in \mathbb{R}$. Platí

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = 0.$$

ii. $f(x) = x^m$, kde $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$:

Pro $a \in \mathbb{R}$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)\left(x^{m-1} + x^{m-2}a + \cdots + a^{m-1}\right)}{x - a} = na^{n-1}.$$

iii. $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f'_+(0) &= \lim_{x \to 0+} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \\ f'_-(0) &= \lim_{x \to 0-} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{-1}{x} = +\infty,\end{aligned}$$

odkud máme, že $\operatorname{sgn}'(0) = \infty$.

iv. $f(x) = |x|$

$$f'_+(0) = 1, \qquad f'_-(0) = -1,$$

a proto derivace $f'(0)$ neexistuje.

Věta 44 (Derivace a spojitost)**.** *Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom je f v bodě a spojitá.*

Důkaz. Počítejme

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a) \right) = \underbrace{f'(a)}_{\in \mathbb{R}} \cdot 0 + f(a) = f(a).$$

$\square$

Poznámka 39.

(i) Věta 44 platí i v jednostranné verzi.

(ii) Předpoklad, že $f'(a)$ je vlastní, nelze vynechat (vizte funkci signum v nule).

Věta 45 (Aritmetika derivací). *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f, g jsou funkce, které mají v bodě a derivaci.*

(a) Pak platí
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$
je-li výraz na pravé straně definován.

(b) Nechť alespoň jedna z funkcí f a g je spojitá v bodě a. Potom platí
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$
je-li výraz na pravé straně definován.

(c) Nechť funkce g je spojitá v bodě a. Potom platí
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)},$$
je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz.

(a) Platí
$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) \\ &= f'(a) + g'(a).\end{aligned}$$

(b) Předpokládejme, že g je spojitá v a. Pak
$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(a+h) - (fg)(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(a+h) - f(a))g(a+h) + f(a)(g(a+h) - g(a))}{h} \\ &= f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a).\end{aligned}$$

(c) Platí

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\, \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h)}{g(a+h)g(a)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a+h)g(a)}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} g(a) - f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right) \\
&= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.
\end{aligned}$$

□

Věta 46 (Derivace složené funkce). *Nechť funkce g je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, má v tomto bodě derivaci a funkce f má derivaci v bodě $g(a)$. Pak platí*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Označme $b = g(a)$,

$$\varphi(y) = \frac{f(y) - f(b)}{y - b}, \quad y \in \mathcal{D}(f) \setminus \{b\}.$$

Platí $\lim_{y\to b} \varphi(y) = f'(b)$. Rozlišíme dva případy

(i) $g'(a) \neq 0$: nalezneme $\eta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(a,\eta) : \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \neq 0.$$

Odtud plyne, že

$$\forall x \in P(a,\eta) : g(x) \neq g(a).$$

Počítejme

$$\begin{aligned}
(f\circ g)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x\to a} \varphi(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.
\end{aligned}$$

(ii) $g'(a) = 0$: Výraz na pravé straně je definován, a proto $f'(b) \in \mathbb{R}$. Nalezneme $c > 0, \delta > 0$ taková, že

$$\forall y \in P(b,\delta) : |\varphi(y)| < c \quad \text{(věta 28)}.$$

Dále

$$\forall y \in P(b,\delta) : \left|\frac{f(y)-f(b)}{y-b}\right| < c,$$
$$\forall y \in B(b,\delta) : |f(y)-f(b)| \leq c \cdot |y-b|.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\varrho_1 > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a,\varrho_1) : \left|\frac{g(x)-g(a)}{x-a} - 0\right| < \varepsilon.$$

Dále nalezneme $\varrho_2 \in (0,\varrho_1)$ takové, že

$$\forall x \in B(a,\varrho_2) : g(x) \in B(b,\delta).$$

Pro každé $x \in P(a,\varrho_2)$ platí

$$\left|\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a}\right| \leq \frac{c|g(x)-g(a)|}{|x-a|} = c \cdot \left|\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right| < c\varepsilon,$$

odkud plyne $(f \circ g)'(a) = 0 = f'(b) \cdot 0 = f'(b) \cdot g'(a)$. □

Poznámka 40. V čem je problém:

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\ &= f'(b) \cdot g'(a).\end{aligned}$$

Funkce

$$y \mapsto \frac{f(y)-f(b)}{y-b} \qquad \lim_{y\to b} \frac{f(y)-f(b)}{y-b} = f'(b) - f'(g(a))$$
$$g(a) = b \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a) = b$$

Věta 47 (Derivace inverzní funkce). *Nechť a je vnitřním bodem intervalu I a f je spojitá a ryze monotónní funkce na I. Označme $b = f(a)$.*

(a) Nechť $f'(a)$ existuje a je nenulová. Potom platí

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(Je-li $f'(a) = \pm\infty$, pak $(f^{-1})'(b) = 0$.)

(b) Nechť $f'(a) = 0$ a f je rostoucí na I. Potom $(f^{-1})'(b) = \infty$.

(c) Nechť $f'(a) = 0$ a f je klesající na I. Potom $(f^{-1})'(b) = -\infty$.

Důkaz. Funkce $f : I \to \mathbb{R}$. Označme $J = f(I)$. Podle věty 37 je J interval. Inverzní funkce

f^{-1} je tedy $J \to I$. Podle věty 40 je f^{-1} spojitá a ryze monotónní. Označme

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in \mathcal{D}(f) \setminus \{a\}.$$

Platí $\lim_{x \to a} \varphi(x) = f'(a)$ v případech (a) až (c). Dále platí $\lim_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$, neboť b je vnitřním bodem J a f^{-1} je spojitá na intervalu J.

(a) Počítáme $\lim_{y \to b} (\varphi \circ f^{-1})(y)$, a je splněna podmínka (P), protože f^{-1} je ryze monotónní. Máme tedy

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{y \to b} (\varphi \circ f^{-1})(y) = \lim_{y \to b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{y \to b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)},$$

tedy

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{1}{\frac{y-b}{f'(y) - f'(b)}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) Podobně jako v (a) máme, že

$$\lim_{y \to b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = f'(a) = 0.$$

Potom platí podle věty 30

$$(f^{-1})' = \lim_{y \to b} \frac{1}{\frac{y-b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}} = \infty.$$

(c) Analogicky jako (b). □

Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c, x \in \mathbb{R}$

  $f'(x) = 0, x \in \mathbb{R}$
- $(x^n)' = nx^{n-1}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $(\exp(x))' = \exp(x), x \in \mathbb{R}$

$$(\exp(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x + h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x)$$

- $(\log x)' = \frac{1}{x}, x \in (0, \infty)$

$$(\log x)' = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

$$f(z) = \exp(z)$$
$$f^{-1}(x) = \log x$$

- $(x^a)' = ax^{a-1}, x \in (0,\infty)\,, a \in \mathbb{R}$

$$(x^a)' = \left(e^{a\log x}\right)' = e^{a\log x}\cdot\frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

- $(a^x)' = a^x \log a, x \in \mathbb{R}, a > 0$

$$(a^x)' = \left(e^{x\log a}\right)' = e^{x\log a}\cdot\log a = a^x\log a.$$

Poznámka 41. Funkce x^x se nehodí derivovat podle žádného z předchozích bodů, ale

$$(x^x)' = \left(e^{x\log x}\right)' = e^{x\log x}\cdot\left(x\log x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\log x + 1), x > 0.$$

- $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt[n]{x}}{x}$ pro $x \in (0,\infty)$ pro $n \in \mathbb{N}$ sudé, nebo $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ pro $n \in \mathbb{N}$ liché. Dále $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \infty$ pro $x = 0$ a $n \in \mathbb{N}$ liché, $\left(\sqrt[n]{x}\right)'_+ = \infty$ pro $x = 0$ a $n \in \mathbb{N}$ sudé.
- $(\sin x)' = \cos x, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\sin x\cdot\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right),\end{aligned}$$

  ale

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h^2}\cdot h = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0,$$

  tedy $(\sin x)' = \cos x$.
- $(\cos x)' = -\sin x\; x \in \mathbb{R}$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \in \mathcal{D}(\operatorname{cotg})$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x\cdot\sin x - \cos x\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin z, z \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ f^{-1}(x) &= \arcsin x, x \in [-1,1]\\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)},\quad x \in (-1,1)\\ \cos^2 y &= 1-\sin^2 y,\quad y \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \implies \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}\\ \cos(\arcsin x) &= \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$

Věta 48 (Nutná podmínka lokálního extrému)**.** *Jestliže a je bodem lokálního extrému funkce f, potom buď $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $f'(a)$ existuje a $f'(a) \neq 0$. Předpokládejme nejprve, že $f'(a) > 0$. Potom

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta) : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Potom

$$\forall x \in (a, a + \delta) : f(x) > f(a), \qquad \forall x \in (a - \delta, a) : f(x) < f(a).$$

Proto a není bodem lokálního extrému, což je spor. Případ $f'(a) < 0$ lze přivést ke sporu analogicky. □

Příklad (Častá úloha)**.** Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a, b]$ a pro každé $x \in (a, b)$ existuje $f'(x)$. Nalezněte extrémy f na $[a, b]$.

Řešení. Protože je f spojitá na $[a, b]$, má f maximum i minimum. Dále ať

$$E = \{x \in (a, b), f'(x) = 0\} \cup \{a, b\}.$$

Extrémy mohou být jedině v E. Dále vypočteme funkční hodnoty prvků v E a podle toho určíme maximum a minimum.

5.2 Věty o střední hodnotě

Věta 49 (Rolle)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Je-li $f(a) = f(b)$ a f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b), pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.*

Důkaz. Podle věty 39 f nabývá v intervalu $[a, b]$ svého maxima i minima. Označme $m = \min f([a, b])$ a $M = \max f([a, b])$. Potom platí

$$m \leq f(a) = f(b) \leq M.$$

Pokud $m = M$, pak je f konstantní na $[a, b]$ a stačí volit $c \in (a, b)$ libovolně.

Pokud $m < M$, pak platí $m < f(a)$ nebo $f(a) < M$. Pokud $f(a) < M$, pak existuje $c \in [a, b]$ takové, že $f(c) = M$. Podle předpokladů věty a podle věty 48 máme $f'(c) = 0$. Pokud $m < f(a)$, postupujeme obdobně. □

Věta 50 (Lagrange). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ a $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci. Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Definujme pomocnou funkci

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b]\,.$$

Platí, že

- g je spojitá na $[a, b]$,
- $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) = f(a)$,
- $g'(x) = \underbrace{f'(x)}_{\in \mathbb{R}^*} - \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\in \mathbb{R}}$, $x \in (a, b)$.

Podle Rolleovy věty 49 nalezneme $c \in (a, b)$ takové, že $g'(c) = 0$. Potom platí

$$\underbrace{f'(c)}_{\in \mathbb{R}} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Odsud dostáváme

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Věta 51 (Cauchy). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, f a g jsou funkce spojité na $[a, b]$, f má v každém bodě $x \in (a, b)$ derivaci a g má v každém bodě $x \in (a, b)$ vlastní nenulovou derivaci. Potom $g(a) \neq g(b)$ a existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Důkaz. Podle Lagrangeovy věty 50 nalezneme $d \in (a, b)$ takové, že

$$g'(d) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Platí $g'(d) \neq 0$, a tedy $g(a) \neq g(b)$. Položme

$$\varphi(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)), \quad x \in [a, b]\,.$$

Platí, že

- φ je spojitá na $[a, b]$,
- $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 0$,
- $\varphi'(x) = \underbrace{f'(x)}_{\in\mathbb{R}^*}\underbrace{(g(b) - g(a))}_{\neq 0} - (f(b) - f(a))\underbrace{g'(x)}_{\in\mathbb{R}}$, $x \in (a, b)$.

Podle Rolleovy věty 49 nalezneme $c \in (a, b)$ takové, že $\varphi'(c) = 0$, neboli

$$\underbrace{f'(c)}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{(g(b) - g(a))}_{\neq 0} - (f(b) - f(a))\underbrace{g'(c)}_{\neq 0} = 0.$$

Odtud plyne

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Věta 52 (l'Hôspitalovo pravidlo)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f, g jsou funkce, existuje*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

a platí buď

(a) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, *nebo*

(b) $\lim_{x\to a^+} |g(x)| = \infty$.

Potom platí

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Důkaz. Provedeme důkaz (a), důkaz (b) umět nemusíme.

Označme $L = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Pomocné tvrzení.

(i) Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > L$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P^+(a, \delta) : \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha.$$

(ii) Pro každé $\beta \in \mathbb{R}, \beta < L$ existuje $\delta' > 0$ takové, že

$$\forall x \in P^+(a, \delta') : \frac{f(x)}{g(x)} > \beta.$$

Důkaz pomocného tvrzení.

(i) Nalezneme $r \in (L, \alpha)$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že platí

- f, f', g a g' jsou definovány na $P^+(a, \delta)$,
- f', g' jsou vlastní na $P^+(a, \delta)$,
- g' je nenulové na $P^+(a, \delta)$,
- $\forall x \in P^+(a, \delta) : \frac{f'(x)}{g'(x)} < r$,
- g je nenulová na $P^+(a, \delta)$; pokud by existoval nulový bod f v $P^+(a, \delta)$, pak je nejvýše jeden a δ vhodně zmenšíme.

Zvolme $x \in P^+(a, \delta)$. Předpokládejme, že $y \in P^+(a, \delta)$ a $y < x$. Podle Cauchyovy věty 51 nalezneme $c \in (y, x)$ takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}.$$

Potom $\frac{f'(c)}{g'(c)} < r$, a tedy

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r.$$

Potom máme, že

$$\lim_{y \to a^+} \underbrace{\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}}_{<r} = \underbrace{\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\neq 0}}_{\leq r} < \alpha.$$

(ii) Dokážeme analogicky.

Vlastní důkaz. Pokud $L = \infty$, resp. $L = -\infty$, pak věta plyne z (ii), resp. z (i). Pokud $L \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, položíme $\alpha = L + \varepsilon$, $\beta = L - \varepsilon$ a nalezneme příslušná δ a δ'. Položme $\delta_1 = \min\{\delta, \delta'\}$. Pak pro každé $x \in P^+(a, \delta_1)$ platí

$$L - \varepsilon = \beta < \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha = L + \varepsilon, \quad \text{tj. } \frac{f(x)}{g(x)} \in B(L, \varepsilon),$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

Poznámka 42.

i. $\lim_{x \to 0} \frac{2x+1}{3x+1} \neq \lim_{x \to 0} \frac{2}{3}$

ii. $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x + \sin x} = 1$, ale l'Hôspitalovým pravidlem výsledek nedostaneme *iii.* $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$

Příklad. Spočtěte $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Řešení. L'Hôspitalovým pravidlem dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{2} = -\frac{1}{6}.$$

Věta 53 (Vztah derivace a monotonie)**.** *Nechť f je spojitá na intervalu J a v každém vnitřním bodě J (množinu všech vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) existuje derivace f.*

(i) Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.

(ii) Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.

(iii) Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.

(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je nerostoucí na J.

Důkaz. Dokážeme (i), ostatní případy se dokážou analogicky. Předpokládejme, že $x, y \in J$, $x < y$. Podle Lagrangeovy věty 50 nalezneme $c \in (x, y)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0.$$

Odtud plyne $f(x) < f(y)$. □

Poznámka 43 (Varování!)**.** Věta 53 je formulovaná pro *interval*.

Věta 54. *Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$.*

Důkaz. Je vlastně

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Platí, že

$$\lim_{x\to a_+} (f(x) - f(a)) = 0, \qquad \lim_{x\to a_+} (x - a) = 0.$$

Odtud z l'Hôspitalova pravidla dostáváme

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to a_+} f'(x).$$

□

Definice 56. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a f má vlastní n-tou derivaci na okolí bodu a. Potom $(n+1)$**-ní derivací funkce** f v bodě a rozumíme

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

Poznámka 44. Derivace značíme

$$f' \quad f'' \quad f''' \quad f^{(4)} \quad f^{(5)} \quad \dots \quad f^{(n)}.$$

Věta 55. *Nechť $f'(a) = 0$, $f'' > 0$ (resp. $f'' < 0$). Potom f má v a lokální minimum (resp. lokální maximum).*

Důkaz. Předpokládejme, že $f''(a) > 0$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in B(a,\delta) : f'(x) \text{ existuje vlastní,}$$
$$\forall x \in P(a,\delta) : \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0.$$

Odtud plyne, že $\forall x \in (a-\delta, a)$ máme $f'(x) < 0$ a $\forall x \in (a, a+\delta)$ je $f'(x) > 0$. Funkce f je na $(a-\delta, a+\delta)$ spojitá, neboť má na $(a-\delta, a+\delta)$ vlastní derivaci. Potom je f klesající na $(a-\delta, a)$ podle věty 53. Podobně f je rostoucí na $(a, a+\delta)$. Odtud máme, že a je bodem lokálního minima f. Případ $f''(a) < 0$ lze řešit obdobně. □

Poznámka 45. Ve větě 55 je a dokonce bodem *ostrého* lokálního minima (resp. maxima).

5.3 Konvexní a konkávní funkce

Definice 57. Nechť I je interval, f je funkce a $I \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f je

- **konvexní** na I, jestliže
$$\forall x, y \in I\, \forall \lambda \in (0,1) : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$
- **konkávní** na I, jestliže
$$\forall x, y \in I\, \forall \lambda \in (0,1) : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$
- **ryze konvexní** na I, jestliže
$$\forall x, y \in I\, \forall \lambda \in (0,1) : f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$
- **ryze konkávní** na I, jestliže
$$\forall x, y \in I\, \forall \lambda \in (0,1) : f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Poznámka 46. f je [ryze] konvexní na I právě tehdy, když $-f$ je [ryze] konkávní na I.

Lemma 3 (Ekvivalentní podmínky pro konvexitu)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) f *je konvexní na* I,

(ii) $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I: \ \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$,

(iii) $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I: \ \dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$,

(iv) $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I: \ \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

Důkaz. Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Nalezneme $\lambda \in (0,1)$ takové, že $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$. Vyjde

$$\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}.$$

Označme $c = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3)$. Platí

$$\frac{c - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - c}{x_3 - x_2} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}. \tag{8}$$

(i) $\implies$ (ii) Potom platí $c \geq f(x_2)$. Z (8) plyne

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}.$$

(ii) $\implies$ (i) Mějme $x_1, x_3 \in I$ a $\lambda \in (0,1)$. BÚNO $x_1 < x_3$. Položme $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$. Máme, že

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} = \frac{c-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

odkud plyne $c \geq f(x_2)$.

Ostatní implikace analogicky. □

Věta 56 (Konvexita a jednostranná derivace)**.** *Nechť f je konvexní funkce na nedegenerovaném intervalu I a $a \in I$.*

(a) Je-li a vnitřní bod I, potom existují vlastní jednostranné derivace $f'_-(a)$, $f'_+(a)$, které splňují

$$f'_-(a) \leq f'_+(a).$$

(b) Je-li a pravý krajní bod I, pak $f'_-(a)$ existuje.

(c) Je-li a levý krajní bod I, pak $f'_+(a)$ existuje.

Důkaz. (a) Zvolme $b \in I, b < a$. Definujme pomocnou funkci

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in I, x > a.$$

Podle lemmatu 3 je φ na intervalu $\mathcal{D}(\varphi)$ neklesající. Pro každé $x \in I, x > a$ platí

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \varphi(x),$$

takže $\varphi(x)$ je zdola omezená na $\mathcal{D}(\varphi)$. Podle věty 35 existuje

$$\lim_{x \to a^+} \varphi(x)$$

vlastní, tj. $f'_+(a) \in \mathbb{R}$. Tvrzení, že $f'_-(a) \in \mathbb{R}$ lze dokázat analogicky. Nerovnost $f'_-(a) \leq f'_+(a)$ plyne z následujícího.

$$\forall x, y \in I, x < a < y : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

Ostatní případy analogicky. □

Věta 57. *Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu J. Pak f je spojitá na J.*

Důkaz. Nechť $a \in J$. Potom a je vnitřním bodem J, a tedy $f'_+(a), f'_-(a) \in \mathbb{R}$. Podle jednostranných variant věty 44 dostáváme spojitost f v bodě a zprava a zleva, a tedy i spojitost v bodě a. □

Věta 58. *Nechť $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a < b$ a f' je spojitá na (a, b).*

- *Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b).*
- *Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b).*
- *Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b).*
- *Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konkávní na (a, b).*

Důkaz. Dokážeme tvrzení (iii), ostatní se potvrdí obdobně. Podle věty 53 je f' neklesající. Ověříme (iv) z lemmatu 3. Zvolme $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ tak, že $x_1 < x_2 < x_3$. Použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě 50 na f na intervalu $[x_1, x_2]$ a $[x_2, x_3]$. Podmínky Lagrangeovy věty jsou splněny, neboť f' existuje vlastní na (a, b). Nalezneme $\xi \in (x_1, x_2)$ takové, že

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Dále nalezneme $\eta \in (x_2, x_3)$ takové, že

$$f'(\eta) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Platí, že $f'(\xi) \leq f'(\eta)$, neboť $\xi < \eta$. Máme tedy, že

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka 47 (Varování!). Větu 58 používáme na *intervalu*.

Definice 58. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a **inflexi** nebo také že a je **inflexním bodem** funkce f, jestliže existuje vlastní $f'(a)$ a existuje $\delta > 0$ takové, že buď

$$\begin{aligned} &\forall x \in P^-(a,\delta) : f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{a} \\ &\forall x \in P^+(a,\delta) : f(x) < f(a) + f'(a)(x-a), \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} &\forall x \in P^-(a,\delta) : f(x) < f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{a} \\ &\forall x \in P^+(a,\delta) : f(x) > f(a) + f'(a)(x-a). \end{aligned}$$

Věta 59 (Nutná podmínka inflexe). *Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f''(a)$ existuje a je různá od nuly. Potom a není inflexním bodem funkce f.*

Důkaz. Předpokládejme, že $f''(a) > 0$. Definujme pomocnou funkci g předpisem

$$g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a), \quad x \in \mathcal{D}(f).$$

Platí, že

$$\begin{aligned} &g'(x) = f'(x) - f'(a), \quad x \in \mathcal{D}(f), \\ &g''(a) = f''(a) > 0, \quad g'(a) = 0, \quad g(a) = 0. \end{aligned}$$

Podle věty 55 a poznámky 45 máme, že existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a,\delta) : g(x) > 0.$$

Z toho plyne, že a není inflexním bodem f. Pokud $f''(a) < 0$, postupujeme obdobně. □

Věta 60 (Postačující podmínka pro inflexi). *Nechť funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a,b), $c \in (a,b)$ a platí*

$$\forall x \in (a,c) : f''(x) > 0 \quad a \quad \forall x \in (c,b) : f''(x) < 0,$$

nebo

$$\forall x \in (a,c) : f''(x) < 0 \quad a \quad \forall x \in (c,b) : f''(x) > 0.$$

Pak c je inflexním bodem funkce f.

Důkaz. Uvažujme první možnost, druhá se dokáže analogicky. Definujme

$$g(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c), \quad x \in (a, b).$$

Pak

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - f'(c), \quad x \in (a, b), \\ g''(x) &= f''(x), \quad x \in (a, c) \cup (c, b). \end{aligned}$$

Funkce g' je spojitá na $(a, c]$ a pro každé $x \in (a, c)$ máme $g''(x) > 0$. Podle věty 53 je g' rostoucí na $(a, c]$. Podobně g' je klesající na $[c, b)$. Platí $g'(c) = 0$. Opět podle věty 53 dostaneme, že g je klesající na (a, b), neboť

$$\begin{aligned} &\forall x \in (a, c) : g'(x) < 0, \\ &\forall x \in (c, b) : g'(x) < 0 \end{aligned}$$

a g je spojitá na intervalu (a, b), neboť zde má vlastní derivaci. Platí $g(c) = 0$, a proto

$$\begin{aligned} &\forall x \in (a, c) : g(x) > 0, \\ &\forall x \in (c, b) : g(x) < 0, \end{aligned}$$

a tedy graf přechází z jedné strany na druhou, což jsme chtěli dokázat. □

5.4 Průběh funkce

Definice 59. Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, je **asymptotou funkce** f v ∞ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax - b) = 0, \quad \text{(resp. } \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b) = 0).$$

Věta 61. *Funkce f má v ∞ asymptotu $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ právě když*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}.$$

Důkaz.

$\Longrightarrow$ Počítejme

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x) - ax - b}{x} + \frac{ax + b}{x} \right) = \frac{0}{\infty} + a = a.$$

Pak

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax - b + b) = 0 + b = b.$$

$\Longleftarrow$ Platí
$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax - b) = b - b = 0.$$

$\square$

Příklad.

(1) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}, x \in \mathbb{R}$

Asymptotu spočítáme jako
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

Pak dopočteme b jako
$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3}\right) = \cdots = \frac{1}{3}.$$

Funkce $f(x)$ má tedy asymptotu $x \mapsto x + \frac{1}{3}$.

(2) $f(x) = e^x$ nemá asymptotu, neboť
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

Kapitola 6

Taylorův polynom

Motivace. Máme-li funkci f, která má v bodě a vlastní derivaci, pak je tečna

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Podíváme-li se na limitu

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-t(x)}{x-a} = 0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a},$$

zjistíme, že aproximuje chování funkce.

6.1 Základní vlastnosti

Definice 60. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \qquad x \in \mathbb{R}$$

nazýváme **Taylorovým polynomem** řádu n funkce f v bodě a.

Poznámka 48.

(1) $\operatorname{st}\left(T_n^{f,a}\right) \leq n$

(2) $T := T_n^{f,a}$, pak $T(a) = f(a)$,

$$T'(a) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1} = T_{n-1}^{f',a}(a) = f'(a)$$

$$T''(a) = f''(a) \quad \ldots \quad T^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

Poznámka 49. Idea: Chceme, aby $T^{(n)}(x) = f^{(n)}(a)$. Cíl: Studovat aproximační vlastnosti T, odhady chyby $|f-T|$ apod.

Lemma 4. *Nechť Q je polynom, $\deg Q \le n$ a*

$$\lim_{x\to a}\frac{Q(x)}{(x-a)^n}=0.$$

Pak Q je nulový polynom.

Důkaz. Nutně $Q(a)=0$. Předpokládejme, že $Q\neq 0$. Potom existuje $k\in\{1,\dots,n\}$ a polynom R tak, že

$$Q(x)=(x-a)^k R(x)\wedge R(a)\neq 0.$$

Potom

$$0=\lim_{x\to a}\frac{Q(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{(x-a)^{n-k}}.$$

Avšak tato limita

$$\begin{cases}\text{neexistuje} & k<n\wedge(n-k)\text{ liché},\\ \text{je nevlastní} & k<n\wedge(n-k)\text{ sudé},\\ \text{je vlastní a nenulová} & k=n,\end{cases}$$

což je spor v každém případě. □

Věta 62 (Peanův tvar zbytku)**.** *Nechť $a\in\mathbb{R}$, $f^{(n)}(a)\in\mathbb{R}$ a P je polynom stupně nejvýše n. Pak*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad P=T_n^{f,a}.$$

Důkaz.

$\Longleftarrow$ Matematickou indukcí máme

1. $n=1$: Máme
$$T_1^{f,a}=f(a)+f'(a)(x-a)=t(x),$$
a tedy
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-t(x)}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))'}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right)=f'(a)-f'(a)=0.\end{aligned}$$

2. $n-1\rightsquigarrow n$: Předpokládejme, že platí pro $n-1$. Jest
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n},$$
f je spojitá (má vlastní derivaci), T je spojitý, tedy
$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-T_n^{f,a}(x)\right)=f(a)-T_n^{f,a}(a)=f(a)-f(a)=0,$$

a proto je limita typu $\frac{0}{0}$. Pak můžeme použít L'Hôspitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-T_{n-1}^{f',a}(x)}{n(x-a)^{n-1}}=0$$

dle indukčního předpokladu.

$\Longrightarrow$ Jest

$$\begin{aligned}0=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)+T_n^{f,a}(x)-P(x)}{(x-a)^n}\\&=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}+\frac{T_n^{f,a}(x)-P(x)}{(x-a)^n}\right).\end{aligned}$$

Dále jest

$$\frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}=0$$

dle již dokázané implikace a

$$\frac{T_n^{f,a}(x)-P(x)}{(x-a)^n}=0$$

dle věty o aritmetice limit, neboť

$$\lim_{x\to a}\frac{T_n^{f,a}-P(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\left(\underbrace{\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}}_{=0\text{ z předpokladu}}-\underbrace{\frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}}_{=0\text{ z již dokázaného}}\right)=0,$$

a tedy podle lemmatu 4 je

$$T_n^{f,a}(x)-P(x)=0,$$

čili $P(x)=T_n^{f,a}(x)$. □

Věta 63 (Obecný tvar zbytku)**.** *Nechť $a,x\in\mathbb{R}$, $a<x$. Předpokládejme, že:*

- *f je funkce, která má v každém bodě intervalu $[a,x]$ vlastní $(n+1)$-ní derivaci,*
- *φ je spojitá funkce na $[a,x]$, která má v každém bodě intervalu (a,x) vlastní nenulovou derivaci.*

Pak existuje $\xi\in(a,x)$ takové, že

$$f(x)-T_n^{f,a}(x)=\frac{1}{n!}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Důkaz. Idea: Cauchyho věta $\frac{F(x)-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$, F definujeme (trik)

Položme

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + f'(t)(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right), \qquad t \in [a,x]\,.$$

Pak

- $F\colon [a,x] \to \mathbb{R}$, F je spojitá na $[a,x]$,
- $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$,
- $F(x) = 0$,
- F má vlastní derivaci v každém bodě (a,x).

Tedy lze použít Cauchyovu větu 51. Máme tedy, že existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že

$$\frac{F(x)-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Dále jest

$$F'(t) = -\left(f'(t) - f'(t) + f''(x-t) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \right),$$

tedy $F'(\xi) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n$. Dosadíme:

$$\frac{0 - (f(x) - T_n^{f,a}(x))}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{-\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{\varphi'(\xi)}.$$

Odtud plyne

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)} \cdot \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka 50. (a) Věta platí i pro $x < a$, důkaz je stejný.

(b) O f stačí předpokládat, že $f^{(n)}$ je spojitá na $[a,x]$ a $f^{(n+1)}$ existuje na (a,x) (vlastní či nevlastní).

Věta 64 (Lagrangeův tvar zbytku). *Nechť a, x, f jsou jako ve větě 63. Pak existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Důkaz. Ve větě 63 položíme $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$. Potom φ je spojitá na $[a,x]$, má vlastní a nenulovou derivaci $(n+1)(x-t)^n$ na (a,x). Tedy dle věty 63 najdeme $\xi \in (a,x)$ takové, že

$$f(x) - T_n f, a(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{0-(x-a)^{n+1}}{-(n+1)(x-\xi)^n} \cdot f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

□

Věta 65 (Cauchyův tvar zbytku). *Nechť a, x, f jsou jako ve větě 63. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a).$$

Důkaz. Použijeme větu 63 pro funkci $\varphi(t) = t, t \in \mathbb{R}$. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{x-a}{1} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

□

6.2 Symbol malé o

Definice 61. Nechť f, g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f je v bodě a **malé o od g** (píšeme $f(x) = o(g(x)), x \to a$), jestliže platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Poznámka 51. (1) Podobně můžeme definovat i jednostranné verze: $x \to a+$ nebo $x \to a-$.

(2) Zápis $f(x) = h(x) + o(g(x)), x \to a$ znamená jednak

$$f(x) - h(x) = o(g(x)), \quad x \to a,$$

ekvivalentně

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - h(x)}{g(x)} = 0;$$

a také

$$f(x) = h(x) + \omega(x), \text{ kde } \omega(x) = o(g(x)), \quad x \to a.$$

Věta 66 (Vlastnosti malého o). *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.*

(i) Jestliže

$$f_1(x) = o(g(x)), \quad x \to a \qquad a \qquad f_2(x) = o(g(x)), \quad x \to a,$$

potom

$$f_1(x) + f_2(x) = o(g(x)), \quad x \to a.$$

(ii) Jestliže

$$f_1(x) = o(g(x)), \quad x \to a \qquad a \qquad f_2(x) = o(g(x)), \quad x \to a,$$

potom

$$f_1(x) f_2(x) = o(g(x)), \quad x \to a.$$

(iii) Jestliže

$$f(x) = o(g_1(x)), \quad x \to a \qquad a \qquad \lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbb{R},$$

potom

$$f(x) = o(g_2(x)), \quad x \to a.$$

Důkaz.

(i) Je

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g(x)} + \lim_{x\to a} \frac{f_2(x)}{g(x)} = 0 + 0 = 0.$$

(ii) Je

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x) f_2(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{f_2(x)}{g(x)} = 0 \cdot 0 = 0.$$

(iii) Je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g_1(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = 0 \cdot L = 0.$$

□

Věta 67 (Malé o a skládání)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $f(y) = o(g(y))$, $y \to b$, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$ a existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že*

$$\forall x \in P(a, \delta) : \varphi(x) \neq b.$$

Pak $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x)))$, $x \to a$.

Důkaz. Chceme spočítat

$$\lim_{x\to a} \frac{f(\varphi(x))}{g(\varphi(x))} = \lim_{x\to a} \frac{f}{g} \circ \varphi(x) = 0$$
$$\lim_{y\to b} \frac{f}{g}(y) = 0,$$
$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = b,$$

φ splňuje podmínku (P) v bodě a.

□

Poznámka 52. Věta 62 dává

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0 \\ &f(x) - T_n^{f,a}(x) = o((x-a)^n), \quad x \to a \\ &f(x) = T_n^{f,a}(x) + o((x-a)^n), \quad x \to a \end{aligned}$$

Příklad. Počítejme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Je však

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Máme tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Poznámka 53. Platí

$$\lim_{x\to a} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0.$$

Kapitola 7

Číselné řady

7.1 Základní pojmy

Definice 62. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost.

(a) Pro $m \in \mathbb{N}$ položme $s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$. **Součet řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je limita posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje.

(b) Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje** (**je konvergentní**), je-li $\lim_{m\to\infty} s_m$ vlastní. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje** (**je divergentní**), jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní. Pro jemnější rozlišení budeme někdy říkat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje k** ∞, respektive **diverguje k** $-\infty$, jestliže $\lim s_m = \infty$, resp. $\lim s_m = -\infty$.

(c) Číslo $a_n, n \in \mathbb{N}$ je n**-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a číslo $s_m, m \in \mathbb{N}$ je jejím m**-tým částečným součtem**.

Poznámka 54. Nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{má součet} & \begin{cases} \text{konverguje} \\ \text{diverguje} & \begin{cases} \text{k } \infty, \\ \text{k } -\infty \end{cases} \end{cases} \\ \text{nemá součet.} \end{cases}$$

Příklad.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ nemá součet (diverguje)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konverguje $\iff$ $q \in (-1, 1)$, je totiž

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \begin{cases} \frac{q^n-1}{q-1}, & q \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ n, & q = 1. \end{cases}$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, neboť

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$
$$s_m = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) = 1 - \frac{1}{m+1}.$$

Věta 68 (Nutná podmínka konvergence řady). *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak platí* $\lim a_n = 0$.

Důkaz. Označme $x_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$. Počítáme

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}).$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Odtud máme

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

□

Věta 69 (Bolzanova–Cauchyova podmínka a konvergence řady). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní,

(ii) platí výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. Ať je $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$.

$\Longleftarrow$ Platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0 : s_m - s_{n-1}| < \varepsilon. \tag{9}$$

Ověříme BC-podmínku pro posloupnost $\{s_m\}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle (9) nalezneme k ε příslušné $n_0 \in \mathbb{N}$. Zvolme libovolně $m_1, n_1 \in \mathbb{N}, m_1 \geq n_0, n_1 \geq n_0$. Rozlišíme následující možnosti:

(i) $m_1 > n_1$: $|s_{m_1} - s_{n_1}| < \varepsilon$, neboť $m_1 \geq n_1 + 1 \geq n_0$,

(ii) $m_1 = n_1$: $|s_{m_1} - s_{n_1}| = 0 < \varepsilon$,

(iii) $m_1 < n_1$: $|s_{m_1} - s_{n_1}| =< |s_{n_1} - s_{m_1}|\varepsilon$, neboť $n_1 \geq m_1 + 1 \geq n_0$.

Máme tedy že $\{a_n\}$ splňuje BC-podmínku, tedy $\{s_n\}$ je konvergentní, a proto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$\Longrightarrow$ Protože $\sum a_n$ konverguje, splňuje $\{s_n\}$ BC-podmínku, odkud plyne (ii). □

Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (harmonická řada) je divergentní.

Vezměme
$$s_{2n} - s_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}}_{n \text{ členů}} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nesplňuje BC-podmínku, a tedy diverguje (k nekonečnu). Zároveň je to protipříklad na opačnou implikaci ve větě 68.

Poznámka 55. Platí $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} - \log n \right) = \gamma \in \mathbb{R}$. Konstantě γ říkáme Eulerova-Mascheroniho konstanta.

Věta 70 (Aritmetické operace a konvergence řad). *Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mají součet.*

(a) Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a výraz $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je definován. Potom má řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ součet a platí
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(b) Nechť je výraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ definován. Potom má řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ součet a platí
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Důkaz.

(a) Označme $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j, \sigma_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha a_j$. Platí $\sigma_n = \alpha s_n$. Platí $\lim s_n = s \in \mathbb{R}^*$. Podle předpokladu je výraz definován, takže $\lim \sigma_n = \lim \alpha s_n$, tedy $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha a_j = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

(b) Označme $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j, \sigma_n = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Pak je $t_n = \sum_{j=1}^{n} (s_n + \sigma s_n)$. Pak $\lim t_n = \lim (s_n + \sigma_n) = s + \sigma$, neboť tento výraz je definován. □

7.2 Řady s nezápornými členy

Věta 71 (Součet řad s nezápornými členy). *Nechť je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řda s nezápornými členy. Pak má $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ součet.*

Důkaz. Poněvadž pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$, je posloupnost $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ neklesající. Odtud máme podle věty 21, že $\lim_{j\to\infty} s_j \in \mathbb{R}^*$. □

Věta 72 (Srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je řada s kladnými členy a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$.*

(a) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, pak je i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, pak je i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.

Důkaz.

(a) Máme

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n, \quad n > n_0$$
$$t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n_0} + b_{n_0+1} + \cdots + b_n.$$

Platí

$$s_n \le s_{n_0-1} + t_n - t_{n_0-1} = t_n + s_{n_0-1} - t_{n_0-1}.$$

Dále platí $\lim s_n = s \in \mathbb{R}^*$ a $\lim t_n = t \in \mathbb{R}^*$ podle věty 71. Potom $s \le t + s_{n_0-1} - t_{n_0-1}$. Podle předpokladu je $t \in \mathbb{R}$, takže celá pravá strana je prvekm $\mathbb{R}$, a tedy $s \in \mathbb{R}$, neboť všechny členy jsou nezáporné.

(b) Plyne z (a) obměnou, což jsme již dokázali. □

Věta 73 (Limitní srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je řada s kladnými členy a $\lim \frac{a_n}{b_n}$ existuje. Označme $A = \lim \frac{a_n}{b_n}$.*

(a) Nechť $A \in (0, \infty)$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(b) Nechť $A = 0$. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(c) Nechť $A = \infty$. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz.

(a) $\Longrightarrow$ Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0 : \frac{a_n}{b_n} > \frac{1}{2}A,$$

tedy že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0 : a_n > \frac{1}{2}Ab_n.$$

Věta 72 dává, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}Ab_n\right)$$

konverguje. Dále podle věty 70(a) máme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

konverguje.

$\Longleftarrow$ Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \ge n_0 : \frac{a_n}{b_n} < 2A.$$

Potom máme

$$\forall n \geq n_0 : a_n < 2Ab_n.$$

Protože $\sum b_n$ konverguje, konverguje i $\sum 2Ab_n$ podle věty 70. Odtud podle věty 72 dostáváme, že konverguje i $\sum a_n$.

(b) Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geq n_0 : \frac{a_n}{b_n} < 1.$$

Odtud máme

$$\forall n \geq n_0 : a_n < b_n.$$

Protože $\sum b_n$ konverguje, konverguje podle věty 72 i $\sum a_n$.

(c) Obdobně. □

Příklad.

(1) $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^2+3n}$

Zvolme $b_n = \frac{1}{n}$. Z limitního srovnávacího kritéria dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n\sqrt{n}}{n^2 + 3n} = 1 \in (0, \infty),$$

a tedy $\sum a_n$ diverguje, neboť $\sum \frac{1}{n}$ diverguje.

(2) $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Zvolme $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$, přičemž $\sum b_n = 1$. Pak máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1 \in (0, \infty),$$

takže $\sum a_n$ konverguje, neboť $\sum b_n$ konverguje.

Věta 74 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.*

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(d) Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

(e) Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

Důkaz.

(a) Platí
$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq a_n \leq \underbrace{q^n}_{b_n}.$$
Protože je $\sum b_n$ konvergentní, podle věty 72 dostáváme, že $\sum a_n$ je konvergentní.

(b) Nalezneme $q \in (\limsup \sqrt[n]{a_n}, 1)$. Potom nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\sup\left\{\sqrt[n]{a_n}, n \geq n_0\right\} < q.$$
Odsud plyne
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q.$$
Z (a) plyne, že $\sum a_n$ konverguje.

(c) $\limsup a_n = \lim a_n$, a tedy můžeme použít (b).

(d) Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1.$$
Nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\forall k \geq k_0 : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1.$$
Zároveň tedy platí
$$\forall k \geq k_0 : a_{n_k} > 1.$$
Neplatí tedy, že $\lim a_{n_k} = 0$, a tedy neplatí, že $\lim a_n = 0$. Proto podle věty 68 $\sum a_n$ diverguje.

(e) Je $\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n} > 1$. Dále použitím (d). □

Poznámka 56. Pokud $\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1$, pak nelze z této informace odvodit ani konvergenci, ani divergenci. Například řada $\sum \frac{1}{n}$ diverguje, přičemž $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$. Naopak řada $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje, přičemž $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Věta 75 (D'Alembertovo podílové kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.*

(a) Jestliže platí
$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$
pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Jestliže $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(d) Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak neplatí $\lim a_n = 0$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$$a_n \leq a_{n_0} q^{n-n_0}.$$

Použijeme matematickou indukci.

- $n = n_0$: Platí.
- $n \rightsquigarrow n+1$: Je
$$a_{n+1} \leq q a_n \leq q a_{n_0} q^{n-n_0} = a_{n_0} q^{(n+1)-n_0}.$$

Protože $\sum a_{n_0} a^{n-n_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n_0} q^{-n_0+1} q^{n-1}$ konverguje, konverguje i $\sum a_n$ podle věty 72.

(b) Nalezneme $q \in \left(\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}, 1\right)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\sup \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n}, n \geq n_0 \right\} < q \in (0, 1).$$

Potom
$$\forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q.$$

Z již dokázané části (a) pak vyplývá, že $\sum a_n$ je konvergentní.

(c) Je $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, dále podle (b).

(d) Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

neboli
$$\forall n \geq n_0 : a_{n+1} > a_n.$$

Odsud plyne, že
$$\forall n \geq n_0 : a_n \geq a_{n_0} > 0.$$

Tedy neplatí, že $\lim a_n = 0$, a proto $\sum a_n$ není konvergentní podle věty 68. □

Věta 76 (Kondenzační kritérium)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost s nezápornými členy. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.*

Důkaz. Označme

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots a_n,$$
$$t_k = a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Pro $n \leq 2^k$ platí

$$\begin{aligned} s_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^k}) \\ &= a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} = t_k. \end{aligned} \tag{10}$$

Pokud $n \geq 2^k$, platí

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + a_{2^k}) \\ &\leq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^k a_{2^k}\right) = \frac{1}{2} \cdot t_k. \end{aligned} \tag{11}$$

$\Longrightarrow$ Máme, že $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$, neboť $\sum a_n$ konverguje. Pro každé n, k splňující $n \geq 2^k$ platí podle (11) $t_k \leq 2s_n \leq 2s$. Odsud máme, že $\lim t_k \in \mathbb{R}$, neboť $\sum 2^k a_{2^k}$ je konvergentní

$\Longleftarrow$ Podle předpokladu $\lim_{k\to\infty} t_k = t \in \mathbb{R}$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}, n \leq 2^k$ platí (11), tedy $s_n \leq t_k \leq t$. Odtud plyne $\lim s_n \leq t$. Proto je $\sum a_n$ konvergentní. □

Věta 77 (Konvergence řady $\sum 1/n^\alpha$)**.** *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.

Důkaz. Rozlišíme dva případy.

(i) $\alpha > 1$: Použijeme větu 76. Místo řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ vyšetřujeme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{k\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^k\right)^{1-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^k,$$

která konverguje, neboť $2^{1-\alpha<0} \in (0,1)$; proto konverguje i původní řada.

(ii) $\alpha \leq 1$: Platí

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \geq 0.$$

Řada $\sum \frac{1}{n}$ diverguje, a tedy máme podle srovnávacího kritéria 72, že i řada $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverguje. □

7.3 Řady s obecnými členy

Věta 78 (Leibniz)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *je monotónní posloupnost splňující* $\lim a_n = 0$*. Potom je řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

konvergentní.

Důkaz. BÚNO $\{a_n\}$ je nerostoucí. Potom

$$\lim a_n = \inf \{a_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Z předpokladu víme, že $\lim a_n = 0$, a tedy $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$. Pak je

$$s_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \cdots + (-1)^n a_n.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2n} = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{\leq 0} + \underbrace{(-a_3 + a_4)}_{\leq 0} + \cdots + \underbrace{(-a_{2n-1} + a_{2n})}_{\leq 0},$$
$$s_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{(-a_{2n+1} + a_{2n+2})}_{\leq 0} \leq s_{2n}.$$

Dále platí

$$s_{2n} = -a_1 + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\leq 0} + \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\leq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n-2} + a_{2n-1})}_{\leq 0} + a_{2n} \geq -a_1,$$

odkud máme, že $\lim s_{2n} = s \in \mathbb{R}$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1}.$$

Potom

$$\lim s_{2n+1} = \lim(s_{2n} - a_{2n+1}) = s - 0 = s.$$

Chceme dokázat, že $\lim s_n = s$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_1 : |s_{2k} - s| < \varepsilon.$$

Podobně

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_2 : |s_{2k+1} - s| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max \{2k_1, 2k_2 + 1\}$. Vezměme $n \geq n_0$. Pokud je n sudé, je $n = 2k$ a $k \geq k_1$. Pak platí

$$|s_n - s| = |s_{2k} - s| < \varepsilon.$$

Pokud je n liché, je $n = 2k+1$, $k \geq k_2$. Pak platí

$$|s_n - s| = |s_{2k+1} - s| < \varepsilon.$$

□

Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konverguje.

7.4 Absolutní konvergence řad

Definice 63. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, ale není absolutně konvergentní, říkáme, že je **neabsolutně konvergentní**.

Věta 79 (Vztah mezi konvergencí a absolutní konvergencí řady)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada. Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a navíc platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Důkaz. Použijeme větu 69, tj. ověříme BC-podmínku pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože $\sum |a_n|$ konverguje, platí

$$\exists n_0 \, \forall m \geq n \geq n_0 : \left| \sum_{j=n}^{m} |a_j| \right| < \varepsilon.$$

Pro každé $m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0$ platí

$$\left| \sum_{j=n}^{m} a_j \right| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j| < \varepsilon$$

díky trojúhelníkové nerovnosti. Odtud máme podle věty 69, že $\sum a_n$ konverguje.

Označme

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
$$\sigma_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

Potom $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$ a $\lim \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}$ a platí

$$\forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq \sigma_n,$$

odkud máme, že $s \leq \sigma$. □

Poznámka 57. Někdy je možné ukázat konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tako, že ukážeme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, což je řada s nezápornými členy.

7.5 Přerovnání řad

Definice 64. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Je-li $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce, nazveme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ **přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 80 (Přerovnání absolutně konvergentní řady). *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Pak přerovnaná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ absolutně konverguje a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}.$$

Důkaz.

(1) Předpokládejme nejprve, že $\sum a_n$ má nezáporné členy. Pro každé n platí

$$a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(n)} \leq a_1 + a_2 + + \ldots a_m \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j,$$

pokud $m \geq \max\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)\}$. Odtud plyne

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Protože je $\sum a_j$ konvergentní, je taky $\sum a_{\pi(k)}$ konvergentní. Poněvadž $\sum a_j$ je přerovnáním řady $\sum a_{\pi(k)}$, dostáváme podle předchozího

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} \geq \sum_{j=1}^{\infty} a_j,$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

(2) Obecný případ. Pro $a \in \mathbb{R}$ budeme značit $a^+ = \max\{a, 0\}$. Obdobně $a^- = \max\{-a, 0\}$. Platí $a = a^+ - a^-$, $0 \leq a^+ \leq |a|$ a konečně $0 \leq a^- \leq |a|$.

Máme-li $\sum a_n$ absolutně konvergentní řadu, je i $\sum |a_n|$ konvergentní. Dostáváme, že $\sum a_n^+$ a $\sum a_n^-$ jsou konvergentní řady s nezápornými členy. Podle bodu (1) máme

$$\sum a_{\pi(n)}^+ = \sum a_n^+,$$
$$\sum a_{\pi(n)}^- = \sum a_n^-.$$

Dále je

$$\sum a_{\pi(n)} = \sum (a^+_{\pi(n)} - a^-_{\pi(n)}) = \sum a^+_{\pi(n)} - \sum a^-_{\pi(n)}$$

podle věty 70. Dále je

$$= \sum a^+_n - \sum a^-_n = \sum (a^+_n - a^-_n) = \sum a_n,$$

čímž je důkaz u konce. □

Věta 81 (Riemann). *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně a $s \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje přerovnání této řady se součtem s.*

Důkaz. Hlavní myšlenka důkazu. Označme

$$P = \{n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0\}, Q = \{n \in \mathbb{N}, a_n < 0\}.$$

Pak je $\mathbb{N} = P \cup Q$ a taky $P \cap Q = \emptyset$. Množiny P a Q jsou nekonečné (kdyby nějaká z nich byla konečná, řada by byla absolutně konvergentní). Nalezneme posloupnosti přirozených čísel $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že jsou prosté a $P = \{p_n, n \in \mathbb{N}\}$, $Q = \{q_n, n \in \mathbb{N}\}$. Dále je $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = \infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{q_n} = -\infty$, jinak by řada nebyla neabsolutně konvergentní. Bereme členy z P, dokud částečný součet není větší než s. Pak beru z Q, dokud částečný součet není menší než s, a tak podobně. Platí $\lim a_n = 0$, neboť $\sum a_n$ je konvergentní řada. Proto částečné součty konvergují k s. Pro $s = \infty$ začneme s hranicí 1, pak zařadíme záporný člen, pak máme hranici 2, a tak podobně. □

7.6 Součin řad

Definice 65. **Cauchyovým součinem řad** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ rozumíme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, kde

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Věta 82 (Mertens). *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Pak platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right).$$

Důkaz. Označme

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad A = \sum_{n=1}^{\infty}, \qquad \alpha = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

$$B_m = \sum_{i=1}^{m} b_i \qquad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad \beta_n = B_n - B,$$

$$C_n = \sum_{i=1}^{n}, \quad c_i = \sum_{j=1}^{i} a_{i+1-j} b_j.$$

Je

$$\begin{aligned}
C_n &= \underbrace{(a_1 b_1)}_{c_1} + \underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1)}_{c_2} + \cdots + \underbrace{(a_1 b_n + a_2 + b_{n-1} + \cdots + a_n b_1)}_{c_n} \\
&= a_1(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a_2(b_1 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_n b_1 \\
&= a_1(B + \beta_n) + a_2(B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B + \beta_1) \\
&= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)B + \underbrace{(a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_1)}_{\gamma_n} \\
&= A_n B + \gamma_n.
\end{aligned}$$

Chceme, že $\lim C_n = A \cdot B$. Stačí ukázat, že $\lim \gamma_n = 0$, neboť $\lim A_n = A$ a

$$\lim C_n = \lim(A_n B + \gamma_n) = A \cdot B + 0 = A \cdot B.$$

Budeme dokazovat $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$. Víme, že

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0. \tag{12}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky (12) nalezneme $N \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geq N : |\beta_n| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $n \geq N$ platí

$$\gamma_n = (a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \cdots + a_{n+1-N}\beta_N) + (a_{n+2-N}\beta_{N-1} + \cdots + a_n\beta_1).$$

Odhadneme $|\gamma_n|$ jako

$$\begin{aligned}
|\gamma_n| &\leq (|a_1| \cdot \underbrace{|\beta_n|}_{<\varepsilon} + \cdots + |a_{n+1-N}| \cdot \underbrace{|\beta_N|}_{<\varepsilon}) + |a_{n+2-N}\beta_{N-1} + \cdots + a_n\beta_1| \\
&\leq \alpha\varepsilon + |a_{n+2-N}\beta_{N-1} + \cdots + a_n\beta_1|.
\end{aligned}$$

Poněvadž $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$, dostáváme, že

$$0 \leq \limsup |\gamma_n| \leq \alpha \cdot \varepsilon,$$

a proto $\limsup |\gamma_n| = 0$. Dále platí

$$0 \leq \liminf |\gamma_n| \leq \limsup |\gamma_n| = 0,$$

a tedy $\liminf |\gamma_n| = 0$ a taky $\lim \gamma_n = 0$. $\square$

Příklad. Řada

$$c_k \sum_{n=1} \infty \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{a_n=b_n}$$

konverguje podle Leibnitzova kritéria, neboť $\frac{1}{\sqrt{n}}$ konverguje. Řada

$$c_k \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{k+i-1}}{\sqrt{k+1-i}} \cdot \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}} = (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}},$$

díky AG nerovnosti máme

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}} \geq \frac{1}{\frac{(k+1-i)+i}{2}} = \frac{2}{k+1},$$

a tedy i

$$c_k \geq \frac{2}{k+1},$$

a proto $\sum c_k$ diverguje, neboť není splněna nutná podmínka konvergence.

Věta 83 (Abel). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right).$$

7.7 Taylorovy řady elementárních funkcí

Definice 66. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom řadu

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(x-a)^j$$

nazýváme **Taylorovou řadou o středu** a. Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **Maclaurinově řadě**.

Některé základní vzorce.

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$
$$\forall x \in (-1,1] : \log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{(2k)!} x^{2k}$$
$$\forall x \in (-1,1) : (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Exponenciální funkce. Použijeme Lagrangeův tvar zbytku (věta 64). Máme funkce $f(x) = \exp(x)$ v bodě $a = 0$. Uvažujme $x \neq a$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme podle věty 64 bod ξ_n mezi 0 a x splňující

$$f(x) - T_n^{f,a} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_n) x^{n+1}.$$

Potom

$$|f(x) - T_n^{f,0}(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} e^{|x|}$$

jde pro $n \to \infty$ k nule. Tedy

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n^{f,0}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} x^j = \boxed{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j}.$$

Odtud plyne pro $x = 1$:

$$e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}.$$

Logaritmická funkce. Opět použijeme Lagrangeovu větu. Máme $f(x) = \log(1+x)$, $x \in (0,1]$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme podle věty 64 $\xi_n \in (0,x)$ splňující

$$|f(x) - T_n^{f,0}(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_n) x^{n+1} \right|.$$

Je

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x}\\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}\\
f'''(x) &= (-1)(-2)\frac{1}{(1+x)^3}\\
&\dots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)(-2)\dots(-(n-1))\frac{1}{(1+x)^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n}.
\end{aligned}$$

Přepíšeme tedy původní výraz

$$= \left|\frac{1}{(n+1)!}(-1)^n n!\frac{1}{(1+\xi_n)^{n+1}}x^{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1},$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} T_n^{f,0}(x) = f(x).$$

Dále ať je $x \in (-1,0)$. Podle věty 65 nalezneme $\xi_n \in (x,0)$ splňující

$$\begin{aligned}
|f(x) - T_n^{f,0}(x)| &= \left|\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi_n)(x-\xi_n)^n x\right|\\
&= \left|\frac{1}{n!}(-1)^n\frac{1}{(1+\xi_n)^{n+1}}(x-\xi_n)^n x\right| = \left|\left(\frac{x-\xi_n}{1+\xi_n}\right)^n\frac{x}{1+\xi_n}\right|,
\end{aligned}$$

ale

$$\begin{aligned}
\frac{\xi_n - x}{1+\xi_n} &\leq -x, \qquad \text{neboť}\\
\xi_n - x &\leq -x - x\xi_n\\
\xi_n(1+x) = \xi_n + x\xi_n &\leq 0.
\end{aligned}$$

Původní výraz je tedy roven

$$= \left(\frac{\xi_n - x}{1+\xi_n}\right)^n\frac{|x|}{1-|x|} \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

což pro $n \to \infty$ konverguje k nule.

Odtud plyne pro $x = 1$:

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Funkce sinus. Máme $f(x) = \sin x$. Vezměme $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme ξ_n mezi 0 a x splňující

$$f(x) - T_n^{f,0}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_n) x^{n+1}.$$

Pak máme

$$|f(x) - T_n^{f,0}(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1},$$

což pro $n \to \infty$ jde k nule.

7.8 Posloupnosti a řady s komplexními členy

Definice 67. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních čísel a $z \in \mathbb{C}$. Řekneme, posloupnost komplexních čísel **konverguje** k $z \in \mathbb{C}$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - z| < \varepsilon.$$

Píšeme $\lim a_n = z$.

Poznámka 58.

(1) $\{a_n\}$ konverguje k z právě tehdy, když $\lim_{n \to \infty} |a_n - z| = 0$.

(2) Limita posloupnosti $\{a_n\}$ je určena jednoznačně. Kdyby $\{a_n\}$ konvergovala k z_1 a z_2, je

$$|z_1 - z_2| \leq \underbrace{|z_1 - a_n|}_{\to 0} + \underbrace{|a_n - z_2|}_{\to 0},$$

odkud máme $z_1 = z_2$.

(3) Platí věta o aritmetice limit.

(4) $\lim a_n = z \iff (\lim \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} z \wedge \lim \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} z)$.

Definice 68. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních čísel. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme **m-tám částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat **n-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje (jako prvek $\mathbb{C}$). Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada **konverguje**, je-li její součet komplexní číslo. V opačném případě řekneme, že řada **diverguje**.

Definice 69. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní.

Věta 84 (Vztah mezi konvergencí a absolutní konvergencí řady s komplexními členy)**.** *Je-li* *řada komplexních čísel* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní, pak je konvergentní.*

Definice 70. **Komplexní exponenciální funkcí** rozumíme funkci $\exp : \mathbb{C} \to C$ definovanou předpisem

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Kapitola 8

Primitivní funkce

8.1 Základní vlastnosti

Definice 71. Nechť I je otevřený interval a $f : I \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce $F : I \to \mathbb{R}$ je **primitivní funkcí** k funkci f na I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Poznámka 59.

(1) Existují funkce, které nemají funkci primitivní, např. sgn na $\mathbb{R}$.

(2) Je-li funkce F primitivní k funkci f na I, potom F je spojitá na I.

(3) Hledání primitivní funkce označujeme jako **integraci**. Primitivní funkci někdy říkáme **neurčitý integrál**.

(4) Je-li F primitivní k f na I, potom $F + c$, kde $c \in \mathbb{R}$, je také primitivní k f na I.

Věta 85 (Tvar množiny primitivních funkcí)**.** *Nechť I je otevřený interval, $f, F, G : I \to \mathbb{R}$ jsou funkce, přičemž F a G jsou primitivní funkce k f na I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F = G + c$.*

Důkaz. Položme

$$H(x) = F(x) - G(x), \qquad x \in I.$$

Potom pro každé $x \in I$ platí

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Odtud máme, že $H(x)$ je konstantní na I. $\square$

Označení. Množinu všech primitivních funkcí k funkci f označujeme symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pro popis této množiny budeme používat značení

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} F(x), \qquad x \in I.$$

Jednotlivé části symbolu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ jsou znak integrálu $\int$, integrand $f(x)$ a symbol $\mathrm{d}x$ označující proměnnou, vzhledem k níž integrujeme.

Tabulkové integrály.

$$\int x^n\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{pro } n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0; x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } (0, \infty) \text{ pro } n \in \mathbb{Z}, n < -1$$

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x \in (0, \infty) \quad \text{pro } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \log|x|, \quad x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, \infty)$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} -\cos x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \operatorname{tg} x, \quad x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{-1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \operatorname{cotg} x, \quad x \in (k\pi, \pi + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \arcsin x, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \arccos x, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int -\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \operatorname{arccotg} x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Věta 86 (Existence primitivní funkce)**.** *Nechť f je spojitá funkce na otevřeném neprázdném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.*

Věta 87 (Primitivní funkce a aritmetické operace)**.** *Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a funkce f a g mají na otevřeném intervalu I primitivní funkce. Pak mají funkce αf a $f + g$ primitivní funkce na I a platí*

$$\int (f+g) = \int f + \int g, \qquad \int \alpha f = \alpha \int f.$$

Důkaz. Obě rovnosti dokážeme zvlášť.

- První rovnost

  $\subseteq$ Označme $H \in \int(f+g)$, Zvolme $F \in\in f, G \in \int g$. Pak je

$$\begin{aligned} H &= (H-F-G)+F+G, \qquad \text{a} \\ (H-F-G)'+F' &= f+g-f-g+f = f. \end{aligned}$$

  $\supseteq$ Označme $H \in \int f + \int g$. Je

$$\begin{aligned} H &= F_1 + G_1, & F_1 \in \int f, \qquad G_1 \in \int g \\ H' &= F_1' + G_1' = f+g, \end{aligned}$$

  a tedy $(H-F-G)+F \in \int f$ a $G \in \int g$.

- Druhá rovnost

  $\subseteq$ Vezměme $H \in \int \alpha f$. Pak je $H = \alpha \frac{1}{\alpha} H$, a tedy

$$\left(\frac{1}{\alpha}H\right)' = \frac{1}{\alpha}\alpha f = f,$$

  a proto $\frac{1}{\alpha}H \in \int f$.

  $\supseteq$ Vezměme $F \in \int f$. Pak je

$$(\alpha F)' = \alpha f \in \int \alpha f.$$

□

Věta 88 (Integrace per partes)**.** *Nechť funkce f a g mají na otevřeném intervalu I po řadě primitivní funkce F a G a f je spojitá na I. Pak platí*

$$\int fG = FG - \int Fg \quad \textit{na } I.$$

Důkaz. Dokážeme dvě inkluze.

$\subseteq$ Funkce f i G jsou spojité na I. Proto je i fG spojitá a podle věty 87 má primitivní funkci, označme ji L, je tedy $L \in \int fG$. Je

$$L = FG - FG + L = FG - (FG - L).$$

Chceme ověřit, že $(FG-L) \in \int Fg$. Počíáme

$$(FG-L)' = F'G + FG' - L' = fG + Fg - fG = Fg,$$

což jsme chtěli dokázat.

$\supseteq$ Již víme, že Fg má primitivní funkci na I. Vezměme si $U \in \int Fg$. Chceme dokázat, že $FG - U \in \int fG$. Je

$$(FG - U)' = F'G + FG' - U' = fG + Fg - Fg = fG,$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

Příklad.

(1) Najděte $\int \log x \, dx$.

Funkci přepíšeme jako $\int 1 \cdot \log x \, dx$. Pak je

$$\int 1 \cdot \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \log x - \int 1 \, dx \overset{c}{=} x \log x - x, \quad x \in (0, \infty).$$

(2) Najděte $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

Označme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx$. Pak je

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \underbrace{1}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^n}}_{G} \, dx = \underbrace{x}_{F} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^n}}_{G} - \int \underbrace{x}_{F} \underbrace{(-n)\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} 2x}_{g} \, dx \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \left(\int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx \right) \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \left(\int \frac{1}{(1+x^2)^{n}} \, dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx \right) \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}
\end{aligned}$$

a po vyjádření máme

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n \\
I_1 &= \int \frac{1}{1+x^2} \, dx \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R} I_2 \qquad \overset{c}{=} \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R} \\
&\dots
\end{aligned}$$

(3) Najděte $\int x \sin x \, dx$.

Je

$$\begin{aligned}\int \underbrace{e^x}_{f} \underbrace{\sin x}_{G} \, dx &= \underbrace{e^x}_{F} \underbrace{\sin x}_{G} - \int \underbrace{e^x}_{F} \underbrace{\cos x}_{g} \, dx \\ &= e^x - \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x(-\sin x) \, dx \right) \\ &= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx,\end{aligned}$$

a tedy

$$\int e^x \sin x \, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Věta 89 (Darbouxova vlastnost derivace). *Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci. Potom f zobrazuje každý interval $J \subset I$ opět na interval.*

Důkaz. Nechť $J \subset I$ je interval. Chceme ukázat, že $f(J)$ je interval. Vezměme $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$ a $z \in (y_1, y_2)$. Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ takové, že $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Předpokládejme, že $x_1 < x_2$. Druhý případ by se řešil analogicky. Označme F funkci primitivní k f na I. Položme

$$H(x) = F(x) - zx, \qquad x \in I.$$

Funkce H je spojitá na I, a tedy i na $[x_1, x_2]$. Existuje $x^* \in [x_1, x_2]$, kde H nabývá minima na $[x_1, x_2]$. Platí

$$H'(x) = F'(x) - z = f(x) - z, \qquad x \in I,$$

tedy

$$H'(x_1) = f(x_1) - z = y_1 - z < 0, \tag{13}$$
$$H'(x_2) = f(x_2) - z = y_2 - z > 0. \tag{14}$$

Z (13) plyne, že existuje $\delta_1 > 0$ takové, že

$$\forall x \in (x_1, x_1 + \delta_1) : H(x_1) > H(x).$$

Z (14) plyne, že existuje $\delta_2 > 0$ takové, že

$$\forall x \in (x_2 - \delta_2, x_2) : H(x) < H(x_2).$$

Odtud plyne, že $x^* \in (x_1, x_2)$. Proto je x^* bodem lokálního minima H, a tedy $H'(x^*) = 0$. Proto je $f(x^*) = z$, což jsme chtěli dokázat. □

Věta 90 (První věta o substituci). *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, F je primitivní funkce k f na (a, b), $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ a pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje vlastní $\varphi'(t)$. Potom* *platí*

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} F(\varphi(t)), \qquad t \in (\alpha,\beta).$$

Důkaz. Platí

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \qquad t \in (\alpha,\beta).$$

□

Věta 91 (Druhá věta o substituci). *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$, pro každé $t \in (\alpha,\beta)$ existuje $\varphi'(t)$ vlastní a nenulová a $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a,b) a platí*

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} G(t), \qquad t \in (a,b).$$

Pak platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \qquad x \in (a,b).$$

Důkaz. Podle věty 89 je φ' na (α,β) kladná nebo je φ' na (α,β) záporná. Předpokládejme první možnost, druhá se dokáže analogicky. Potom je φ rostoucí na (α,β), a je tedy prostá. Potom $\varphi^{-1} : (a,b) \to (\alpha,\beta)$ je dobře definována. Počítejme

$$\begin{aligned}\left(G \circ \varphi^{-1}\right)' &= G'\left(\varphi^{-1}(x)\right) \cdot \left(\varphi^{-1}(x)\right)' \\ &= f\left(\varphi(\varphi^{-1}(x))\right) \cdot \varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right) \cdot \underbrace{\frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)}}_{\neq 0}.\end{aligned}$$

□

Příklad. Mějme funkci

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak je $F'(x) = 0$ a pro $x \neq 0$ je

$$F'(x) = \underbrace{2x \sin \frac{1}{x^2}}_{\to 0} + x^2 \cos \frac{1}{x^2} \cdot \frac{-2}{x^2}.$$

Derivace $F(x)$ není spojitá v nule.

Poznámka 60. viz prezentaci

Integrace racionálních funkcí

Definice 72. **Racionální funkcí** rozumíme reálnou funkci, která je podílem dvou polynomů, přičemž jmenovatel není identicky roven nule.

Integrace parciálních zlomků. Rozlišujeme parciální zlomky více typů.

(a) Parciální zlomky prvního typu jsou zlomky tvaru

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x, \quad a \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Integrujeme je následovně:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \begin{cases} A\log|x-a|,\ x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a,\infty) & n = 1, \\ \frac{1}{1-n}\cdot\frac{A}{(x-a)^{n-1}},\ x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a,\infty) & n > 1. \end{cases}$$

(b) Parciální zlomky druhého typu jsou zlomky tvaru

$$I = \int \frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x,$$

kde $B, C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{N}$ a $\alpha^2 - 4\beta < 0$ (tedy polynom ve jmenovateli nemá reálné kořeny). Pak je:

$$I = \frac{B}{2}\underbrace{\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \left(C - \frac{B\alpha}{2}\right)\underbrace{\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x}_{I_2}.$$

Jednotlivé funkce zintegrujeme následovně:

$$I_1 \overset{c}{=} \begin{cases} \log\left(x^2+\alpha x+\beta\right),\ x \in \mathbb{R}, & q = 1, \\ \frac{1}{1-q}\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^{q-1}},\ x \in \mathbb{R}, & q > 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)^q}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)^q}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2+1\right)^q}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

a tento případ převedeme substitucí na integraci

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^q}\,\mathrm{d}t$$

až na nějakou konstantu. Zvolme

$$\varphi(x) = \frac{x + \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}}.$$

Pak je

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}}$$

a můžeme přepsat

$$\int \frac{1}{\left(\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2 + 1\right)^q} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2 + 1\right)^q} \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} \, \mathrm{d}x,$$

a tedy počítáme integrál

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^q},$$

což už umíme.

Věta 92 (Rozklad polynomu)**.** *Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty. Pak existují reálná čísla $x_1, \ldots, x_k$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ a přirozená čísla $p_1, \ldots, p_k$, $q_1, \ldots, q_l$ taková, že*

- *platí*

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l},$$

- *žádné dva z polynomů $x - x_1, \ldots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen,*
- *polynomy $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají žádný reálný kořen.*

Věta 93 (Rozklad na parciální zlomky)**.** *Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty, takové, že $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ a nechť*

$$Q(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \ldots (x - x_k^{p_k}) \left(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1\right)^{q_1} \ldots \left(x^2 + \alpha_l x + \beta_l\right)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q z věty 92. Pak existují jednoznačně určená čísla

$$A_1^1, \ldots, A_{p_1}^1, \ldots, A_1^k, \ldots, A_{p_k}^k, \qquad B_1^1, C_1^1 \ldots, B_{q_1}^1 C_{q_1}^1, \ldots, B_1^l, C_1^l, B_{q_l}^l C_{q_l}^l$$

taková, že platí

$$
\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^1}{(x-x_1)} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{(x-x_k)^{p_k}} \\
& + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^1+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} \\
& + \dots \\
& + \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}}
\end{aligned}
$$

Postup při integraci racionální lomené funkce. Úloha: Spočíteje $\int R(x)\,\mathrm{d}x$, kde

$$
R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)},
$$

přičemž $P(x), P_1(x), P_2(x), Q(x)$ jsou polynomy, $\operatorname{st} P_2(x) < \operatorname{st} Q(x)$. Dále rozložíme $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky a konečně zintegrujeme polynom $P_1(x)$ a jednotlivé parciální zlomky.

Příklad. Spočtěte $\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$.

Podle věty 93 existují $A, B, C \in \mathbb{R}$ taková, že

$$
\frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.
$$

Tuto rovnost přepíšeme na

$$
x^2+1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x+1), \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.
$$

Protože se tyto dvě funkce shodují na prstencovém okolí bodu -1 a jsou spojité, platí druhá rovnost dokonce na $\mathbb{R}$. Upravíme

$$
x^2+1 = (A+B)x^2 + (A+B+C)x + A + C, \qquad x \in \mathbb{R}.
$$

Metodou porovnání koeficientů dostaneme

$$
\begin{aligned}
x^2 &: 1 = A+B, \\
x^1 &: 0 = A+B+C, \\
x^0 &: 1 = A+C.
\end{aligned}
$$

Lze postupovat jednodušeji, třeba pro $x = 1$ dostaneme $A = 2$. Pak $B = -1$ a $C = -1$. Máme tedy

$$
\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x}_{I_2}.
$$

Spočteme

$$
\begin{aligned}
I_1 &\overset{c}{=} 2\log|x+1|, \qquad x \in (-\infty,-1) \text{ nebo } x \in (-1,\infty),\\
I_2 &= \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x}_{I_3} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x}_{I_4},
\end{aligned}
$$

je tedy

$$
\begin{aligned}
I_3 &\overset{c}{=} \log(x^2+x+1), \qquad x \in \mathbb{R},\\
I_4 &= \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x\\
&\overset{c}{=} \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}, \qquad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Původní integrál je tedy roven

$$
\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} 2\log|x+1| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}},
$$

kde $x \in (-\infty,-1)$ nebo $x \in (-1,\infty)$.

Definice 73. **Polynomem dvou proměnných** rozumíme funkci

$$
[u,v] \mapsto \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}u^i v^j,
$$

kde $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro $i,j \in \{0,\dots,n\}$. **Racionální funkcí** dvou proměnných rozumíme podíl polynomů dvou proměnných, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Definice 74. Řekneme, že R je **lichá v první proměnné**, pokud pro každé $(x,y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x,y) \in \mathcal{D}(R)$ a $R(-x,y) = -R(x,y)$. Analogicky definujeme **lichost ve druhé proměnné**. Funkce R je **sudá**, pokud pro každé $(-x,-y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x,-y) \in \mathcal{D}(R)$ a $R(x,y) = R(-x,-y)$.

Goniometrické substituce. Nechť R je racionální funkce dvou proměnných a I otevřený neprázdný interval. Uvažujme integrál tvaru

$$
\int R(\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t, \qquad t \in I,
$$

přičemž integrand je definován na intervalu I. Pro převedení úlohy na integraci racionální funkce lze užít následujících substitucí.

(a) Je-li R lichá ve druhé proměnné, lze užít substituci $\sin t = x$.

(b) Je-li R lichá v první proměnné, lze užít substituci $\cos t = x$.

(c) Je-li R sudá, lze užít susbstituci $\operatorname{tg} t = x$.

(d) Vždy lze použít $\operatorname{tg}(t/2) = x$.

Příklad. Spočtěte $\int \frac{1}{1+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int g(t)\,\mathrm{d}t$.

Máme $R(a,b) = \frac{1}{1+a^2}$. Tato funkce je sudá, použijeme tedy substituci $\operatorname{tg} t = x$. Bude tedy

$$\varphi(t) = \operatorname{tg} t, \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi.$$

Pak je

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}, \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi.$$

Chceme $\operatorname{tg} t = x$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} &= x^2 \\
\sin^2 t &= x^2 \cos^2 t \\
\sin^2 t &= x^2(1 - \sin^2 t) \\
\sin^2 t &= \frac{x^2}{1+x^2}, \\
\cos^2 t &= \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Přepíšeme

$$\int g(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+\sin^2 t} \cos^2 t \underbrace{\frac{1}{\cos^2 t}}_{\varphi(t)} \mathrm{d}t,$$

pak je

$$f(x) = \frac{\frac{1}{1+x^3}}{1 + \frac{x^2}{1+x^2}},$$

a tedy

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+2x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x),$$

původní integrál je tedy roven

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} t), \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi, \pi \in \mathbb{Z}.$$

Protože je primitivní funkce spojitá, ale tato funkce má body nespojitosti, musíme jednotlivé hodnoty „posunout“ tak, aby limita zleva se rovnala limitě zprava v bodech nespojitosti. Nakonec musíme ověřit, že derivace v bodech nespojitosti opravdu vyjde správně.

Několik dalších substitucí. Ať R je racionální funkce dvou proměnných.

- $\int R\left(t, \sqrt[q]{\frac{az+b}{ct+f}}\right) \mathrm{d}t$, kde $q \in \mathbb{N}, a, b, c, f, \in \mathbb{R}, af \neq bc$ Položíme
$$x = \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+f}}.$$
- $\int R\left(t, \sqrt{at^2+bt+c}\right) \mathrm{d}t$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Rozlišíme následující možnosti:
  (1) Polynom at^2+bt+c má dvojnásobný kořen α. Pak můžeme psát
  $$at^2+bt+c = a(t-\alpha)^2,$$
  a tedy
  $$\sqrt{at^2+bt+c} = \sqrt{a}|t-\alpha|, \qquad a > 0.$$
  (2) Polynom at^2+bt+c má dva různé reálné kořeny α_1, α_2, $\alpha_1 < \alpha_2$. Potom můžeme psát
  $$\sqrt{at^2+bt+c} = |t-\alpha_1| \cdot \sqrt{\frac{a(t-\alpha_2)}{t-\alpha_1}}, \qquad a > 0.$$
  (3) Polynom at^2+bt+c nemá reálné kořeny. Potom $a > 0$, a tedy i $c > 0$, aby vůbec úloha měla dobrý smysl. V tom případě můžeme použít tzv. Eulerovy substituce:
  $$\sqrt{at^2+bt+c} = \sqrt{a}t + x,$$
  $$\sqrt{at^2+bt+c} = -\sqrt{a}t + x,$$
  $$\sqrt{at^2+bt+c} = tx + \sqrt{c}.$$
  Tyto substituce vedou na integraci racionální funkce.

Příklad. Spočtěte $\int \frac{1}{t^2\sqrt{t^2+1}} \mathrm{d}t$.

Budeme zvlášť uvažovat intervaly $(-\infty, 0), (0, \infty)$. Za sbustituci zvolíme $\sqrt{t^2+1} = t + x$. Pak je
$$\varphi(t) = \sqrt{t^2+1} - t,$$
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a
$$\varphi'(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}} - 1 = \frac{t^2}{t^2+1} - 1.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}
t^2 + t &= t^2 + 2tx + x^2 \\
t &= 2tx + x^2 \\
t &= \frac{1 - x^2}{2x}, \\
\mathrm{d}t &= \frac{-2x \cdot 2x - (1 - x^2) \cdot 2}{4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-2 - 2x^2}{4x^2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\left(\frac{1-x^2}{2x}\right)^2 \left(\frac{1-x^2}{2x} + x\right)} \cdot \frac{-2 - 2x^2}{4x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{-4x}{(1-x)^2(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(\frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x \\
&\stackrel{c}{=} -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{2}{x^2 - 1},
\end{aligned}$$

kde $x \in (-\infty, -1)$, $x \in (-1, 1)$ nebo $x \in (1, \infty)$. Celkem tedy

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{1}{\left(\sqrt{t^2+1}t\right)^2 - 1},$$

kde $t \in (-\infty, 0)$, $t \in (0, \infty)$.

8.2 Riemannův integrál

Definice 75. Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme **dělením intervalu** $[a, b]$, jestliže

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme **dělícími body**. **Normou dělení** $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\{x_j - x_{j-1}; j \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Řekneme, že dělení D' intervalu $[a, b]$ je **zjemněním dělení** D intervalu $[a, b]$, jestliže každý dělící bod D je i dělícím bodem D'.

Definice 76. Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$. Označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}), \quad \text{kde } M_j = \sup\left\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\right\},$$
$$\underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}), \quad \text{kde } m_j = \inf\left\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\right\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{\overline{S}(f, D); D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\right\},$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{\underline{S}(f, D); D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\right\}.$$

Definice 77.

- Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a, b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od** a **do** b, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Pokud $a > b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. V případě, že $a = b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Definice 78. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Množinou všech funkcí, které mají Riemannův integrál od a do b, značíme $\mathcal{R}([a, b])$.

Poznámka 61.

(1) Platí $\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$.

(2) Funkce $\int_0^1 D(x)\,\mathrm{d}x$, kde

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

je Dirichletova funkce, není riemannovsky integrovatelná. Vezměme $\overline{S}(D, P)$, kde P je dělení intervalu $[0, 1]$. Pak je

$$\overline{S}(D, P) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}) = 1,$$
$$\underline{S}(D, P) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) = 0.$$

Máme tedy, že

$$\overline{\int_0^1} D(x)\,\mathrm{d}x = 1, \qquad \underline{\int_0^1} D(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

a tedy $D(x)$ není riemannovsky integrovatelná.

Lemma 5 (Vlastnosti dělení). *Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a,b]$.*

(a) Nechť D, D' jsou dělení $[a,b]$ a D' zjemňuje D. Pak platí

$$\underline{S}(f,D) \leq \underline{S}(f,D') \leq \overline{S}(f,D') \leq \overline{S}(f,D).$$

(b) Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Pak platí

$$\underline{S}(f,D_1) \leq \overline{S}(f,D_2).$$

(c) Platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

(a) Ať je $D = \{x_j\}_{j=0}^n$. BÚNO D' obsahuje dělící body D a navíc právě jeden bod $z \in (x_{j-1}, x_j)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Můžeme psát

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f,D) &= \sum_{k=1, k\neq j}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) + m_j(x_j - x_{j-1}),\\
\underline{S}(f,D) &= \sum_{k=1, k\neq j}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) + \underbrace{m_j'}_{\geq m_j}(z - x_{j-1}) + \underbrace{m_j''}_{\geq m_j}(x_j - z).
\end{aligned}$$

Tím jsme dokázali první nerovnost. Druhá nerovnost je triviální a třetí nerovnost dokážeme analogicky.

(b) Nechť dělení D zjemňuje D_1 i D_2. Podle části (a) platí

$$\underline{S}(f,D_1) \leq \underline{S}(f,D) \leq \overline{S}(f,D) \leq \overline{S}(f,D_2).$$

(c) Zvolme dělení D_1 intervalu $[a,b]$. Potom pro každé dělení D_2 platí

$$\underline{S}(f,D_1) \leq \overline{S}(f,D_2).$$

Odtud máme, že

$$\underline{S}(f,D_1) \leq \overline{\int_a^b} f = \inf\left\{\overline{S}(f,D_2); D_2 \text{ dělení } [a,b]\right\}.$$

Jinými slovy,

$$\underline{S}(f,D_1) \leq \overline{\int_a^b} f$$

pro každé dělení D_1. Je

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\left\{\underline{S}(f, D_1); D_1 \text{ je dělením } [a,b]\right\},$$

odkud máme

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

$\square$

Důsledek 5 (Odhad horního a dolního Riemannova integrálu)**.** Nechť f je omezená na $[a,b]$, D_1 a D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Potom

$$m(b-a) \leq \underline{S}(f, D_1) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D_2) \leq M(b-a),$$

kde $m = \inf\{f(x);\, x \in [a,b]\}$ a $M = \sup\{f(x);\, x \in [a,b]\}$.

Důkaz. Zvolme dělení D sestávající z bodů a a b. Potom platí

$$m(b-a) = \underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D_1) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \overline{S}(f, D_2) \leq \overline{S}(f, D) = M(b-a).$$

$\square$

Věta 94 (Riemannův integrál a dělení)**.** *Nechť f je omezená na $[a,b]$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \underline{S}(f, D) \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon,$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{S}(f, D) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Důkaz. Nalezneme $K > 0$ takové, že pro každé $x \in [a,b]$ platí $|f(x)| < K$. Nyní zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D_0 = \{x_j\}_{j=0}^n$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D_0) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nalezneme $\delta > 0$ splňující:

(1) $\delta < \min\{x_j - x_{j-1}; j \in \{1, \ldots, n\}\}$,

(2) $\delta < \frac{\varepsilon}{8Kn}$.

Zvolme dělení D na intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Chceme ukázat

$$\overline{\int_a^b} f \le \overline{S}(f,D) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon.$$

Dělení P bude obsahovat právě ty body dělení D_0 a D. Označme $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{P}$) jako intervaly příslušné dělení D (resp. dělení P). Počítáme

$$0 \le \overline{S}(f,D) - \overline{S}(f,P) = \sum_{I \in \mathscr{D}} \sup_I f \cdot \text{délka}(I) - \sum_{j \in \mathscr{P}} \sup_J f \cdot \text{délka}(J).$$

Dále označme $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Pak je

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,D) - \overline{S}(f,P) &= \sum_{\substack{I \in \mathscr{D} \\ I \cap Z \ne \emptyset}} \sup_I f \cdot \text{délka}(I) - \sum_{\substack{J \in \mathscr{P} \\ J \cap Z \ne \emptyset}} \sup_j f \cdot \text{délka}(J) \\ &\le 2n \cdot 2K \cdot \delta = 4Kn\delta < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Dokázali jsme:

$$\overline{\int_a^b} f \le \overline{S}(f,P) \le \overline{S}(f,D_0) \le \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$$

a taky

$$\overline{\int_a^b} f \le \overline{S}(f,D) \le \overline{S}(f,P) + \frac{\varepsilon}{2} < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \overline{\int_a^b} f + \varepsilon.$$

Analogicky i pro $\underline{\int_a^b} f$. □

Důsledek 6 (Riemannův integraál a posloupnost dělení)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a,b]$. Nechť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$. Pak

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,D_n) \qquad \text{a} \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,D_n).$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle věty 94 nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D, $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{\int_a^b} f \le \overline{S}(f,D) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon.$$

Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \ge n_0 : \nu(D_n) < \delta.$$

Potom

$$\forall n \ge n_0 : \overline{\int_a^b} f \le \overline{S}(f,D_n) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,D_n) = \int_a^b f.$$

$\square$

Příklad. Spočtěte $\int_0^1 x^2 \, dx$.

Položme $D_n = \left\{\frac{j}{n}\right\}_{j=0}^{1}$ a označme $f(x) = x^2$.

$$\overline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}.$$

Proto je

$$\overline{\int_0^1} x^2 \, dx = \frac{1}{3}.$$

Obdobně

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} (j-1)^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3},$$

a tedy

$$\underline{\int_0^1} x^2 \, dx = \frac{1}{3},$$

a tedy i

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}.$$

Věta 95 (Kritérium existence Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a, b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) $f \in \mathcal{R}([a, b])$,

(ii) pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Důkaz.

$\Longrightarrow$ Z $f \in \mathcal{R}([a, b])$ platí

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení D_1 intervalu $[a, b]$ splňující

$$\int_a^b f \leq \overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dále nalezneme dělení D_2 intervalu $[a, b]$ splňující

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \underline{S}(f, D_2) \leq \int_a^b f.$$

Zvolme dělení D jako zjemnění D_1 a D_2. Potom platí

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) \leq \overline{S}(f,D_1 - \underline{S}(f,D_2) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

$\Longleftarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme podle (ii) dělení D intervalu $[a,b]$ splňující

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon.$$

Podle lemmatu 5(c) je

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon.$$

Odtud máme $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. □

Definice 79. Řekneme, že funkce f je **stejnoměrně spojitá** na intervalu I, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x,y \in I : (|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Poznámka 62 (Spojitost versus stejnoměrná spojitost)**.**

(1) Funkce f je spojitá na intervalu I pokud

$$\forall x \in I\, \forall \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \forall y \in I : (|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,.$$

Funkce f je stejnoměrné spojitá na intervalu I, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in I\, \forall y \in I : (|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,.$$

Odsud máme, že

$$f \text{ je stejnoměrně spojitá} \implies f \text{ je spojitá.}$$

Opačná implikace obecně neplatí.

(2) Vezměme $I = (0,1)$, $f(x) = \frac{1}{x}, x \in I$. Funkce f je na I spojitá. Bodem x_n značíme bod $\frac{1}{n}$.

Chceme ukázat, že f není stejnoměrně spojitá na I. Položme $\varepsilon = 1$. Nechť $\delta > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n \in (0,\delta) \cap I$. Potom $x_{n+1} \cap I$ a $|x_n - x_{n+1}| < \delta$. Pak je

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{\frac{1}{n}} = n + 1 - n = 1,$$

a tedy

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| = 1.$$

Proto f není stejnoměrně spojitá.

Věta 96 (Spojitost a stejnoměrná spojitost)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom f je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists x \in I \, \exists y \in I : (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,. \tag{15}$$

Nechť $\varepsilon > 0$ splňuje (15). Odsud pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme dvojici $x_n, y_n \in I$ splňující

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon.$$

Podle Weierstrassovy věty 22 nalezneme konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x^*.$$

Platí $x^* \in I$ a dále pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme

$$0 \leq |x^* - y_{n_k}| \leq \underbrace{|x^* - x_{n_k}|}_{\to 0} + \underbrace{|x_{n_k} - y_{n_k}|}_{\to 0}.$$

Odsud máme, že $\lim_{k \to \infty} y_{n_k} = x^*$. Funkce f je spojitá v x^* vzhledem k I, tj.

$$\exists \delta > 0 \, \forall y \in I : |x^* - y| < \delta \implies |f(x^*) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16}$$

Nechť $\delta > 0$ splňuje (16). K němu nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že

$$|x_{n_k} - x^*| < \delta \wedge |y_{n_k} - x^*| < \delta.$$

Potom platí

$$\varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x^*)| + |f(x^*) - f(y_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

odkud máme spor. □

Věta 97 (Vztah Riemannova integrálu a spojitosti)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}([a, b])$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle věty 96 existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ a $\nu(D) < \delta$. Označme

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f, \qquad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f.$$

Z (1) a (2) plyne $m_i \le M_i \le m_i + \varepsilon$. Počítejme

$$\begin{aligned} 0 \le \overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(M_i - m_i)}_{\le \varepsilon}(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Právě jsme dokázali (ii) ve větě 95, a tedy $f \in \mathcal{R}([a,b])$. □

Věta 98 (Vztah Riemannova integrálu a monotónní funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je monotónní funkce na $[a,b]$. Potom $f \in \mathcal{R}([a,b])$.*

Důkaz. BÚNO f je neklesající. Pro každé $x \in [a,b]$ platí $f(a) \le f(x) \le f(b)$. Funkce f je tedy omezená. Nalezneme $K > 0$ takové, že

$$\forall x \in [a,b] : |f(x)| \le K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$. Položme

$$x_j = a + \frac{b-a}{n} \cdot j, \qquad j = 0, \dots, n,$$

$\mathcal{D} = \{x_j\}_{j=0}^{n}$. Počítejme

$$\begin{aligned} \overline{S}(f,D) &= \sum_{j=1}^{n} \sup_{[x_{j-1},x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \cdot \frac{b-a}{n}, \\ \underline{S}(f,D) &= \sum_{j=1}^{n} \inf{[x_{j-1},x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1}) \cdot \frac{b-a}{n}. \end{aligned}$$

Je tedy

$$\begin{aligned} \overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) &= \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1})) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon, \end{aligned}$$

pokud $n > \frac{1}{\varepsilon}(b-a)(f(b)-f(a))$. Odtud vyplývá podle věty 95, že $f \in \mathcal{R}([a,b])$. □

Věta 99 (Linearita Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Pak $f+g \in \mathcal{R}([a,b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a,b])$ *a platí*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Protože jsou funkce f, g omezené, je i $f+g$ omezená. Nechť $I \subseteq [a,b]$ je neprázdný interval. Potom platí

$$\sup_I (f+g) \le \sup_I f + \sup_I g.$$

(Je totiž pro $x \in I$: $f(x)+g(x) \le \sup_I f + \sup_I g$.) Podobně pro infimum platí

$$\inf_I f + \inf_I g \le \inf_I (f+g).$$

Pro libovolné dělení $\mathcal{D}$ intervalu $[a,b]$ platí

$$\underline{S}(f,D) + \underline{S}(g,D) \le \underline{S}(f+g,D) \le \overline{S}(f+g,D) \le \overline{S}(f,D) + \overline{S}(g,D).$$

Nalezneme posloupnost dělení $\{\mathcal{D}^n\}_{n=1}^\infty$ intervalu $[a,b]$ splňující $\lim_{n\to\infty} \nu(\mathcal{D}^n) = 0$. Potom platí podle důsledku 6

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,D^n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,D^n) = \int_a^b f,$$
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(g,D^n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(g,D^n) = \int_a^b g.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\underbrace{\underline{S}(f,D^n) + \underline{S}(g,D^n)}_{\to \int_a^b f + \int_a^b g} \le \underline{S}(f+g,D^n) \le \overline{S}(f+g,D^n) \le \underbrace{\overline{S}(f,D^n) + \overline{S}(g,D^n)}_{\to \int_a^b f + \int_a^b g},$$

a tedy podle věty o dvou strážnících máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f+g,D^n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f+g,D^n) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Podle důsledku 6 dostáváme, že $f+g \in \mathcal{R}([a,b])$ a platí

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Pro α a neprázdný interval $I \subseteq [a,b]$ platí

$$\sup_I(\alpha f) = \begin{cases} \alpha \sup_I f, & \text{pro } \alpha \ge 0, \\ \alpha \inf_I f, & \text{pro } \alpha < 0. \end{cases}$$

Obdobně pro infimum

$$\inf_I(\alpha f) = \begin{cases} \alpha \inf_I f, & \text{pro } \alpha \geq 0, \\ \alpha \sup_I f, & \text{pro } \alpha < 0. \end{cases}$$

Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(\alpha f, D^n) = \left.\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \alpha\overline{S}(f, D^n), & \text{pro } \alpha \geq 0, \\ \lim_{n\to\infty} \alpha\underline{S}(f, D^n) & \text{pro } \alpha < 0. \end{cases}\right\} = \alpha \int_a^b f,$$

podobně

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(\alpha f, D^n) = \left.\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \alpha\underline{S}(f, D^n), & \text{pro } \alpha \geq 0, \\ \lim_{n\to\infty} \alpha\overline{S}(f, D^n) & \text{pro } \alpha < 0. \end{cases}\right\} = \alpha \int_a^b f,$$

odkud podle důsledku 6 dostáváme, že $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$. □

Věta 100 (Riemannův integrál a uspořádání). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ a $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in [a,b]$. Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nechť $\{D^n\}$ je jako v předchozím důkazu. Potom platí pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{\overline{S}(f, D^n)}_{\to\int_a^b f} \leq \underbrace{\overline{S}(g, D^n)}_{\to\int_a^b g}.$$

(Je totiž $\sup_I f \leq \sup_I g$ a $f(x) \leq g(x) \leq \sup_I g(x)$.) Podle věty o limitě a uspořádání tedy dostáváme $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. □

Věta 101 (Aditivita Riemannova integrálu). *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, a f je funkce definovaná na $[a,b]$. Pak platí $f \in \mathcal{R}([a,b])$ právě tehdy, když $f \in \mathcal{R}([a,c])$ a $f \in \mathcal{R}([c,b])$. Je-li $f \in \mathcal{R}([a,b])$, pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nalezneme posloupnost dělení $\{D_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $[a,c]$ splňující $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n^1) = 0$. Dále nalezneme posloupnost dělení $\{D_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $[c,b]$ splňující $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n^2) = 0$. Dělení D_n je dělení intervalu $[a,b]$, které obsahuje právě dělící body D_n^1 a D_n^2. Předpokládejme, že $f \in \mathcal{R}([a,c])$ a $f \in \mathcal{R}([c,b])$. Chceme ukázat, že $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f$$

podle důsledku 6. Obdobně

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f.$$

Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} (\overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2)) = \int_a^c f = \int_c^b f.$$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} (\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2)) = \int_a^b f + \int_a^b f.$$

Proto je podle důsledku 6 $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_a^b f$. Tím je proveden důkaz implikace zprava doleva. Zbývá dokázat, že

$$f \in \mathcal{R}([a,b]) \implies f \in \mathcal{R}([a,c]).$$

Platí

$$0 \le \overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1) \le \overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1) + \underbrace{\overline{S}(f, D_n^2) - \underline{S}(f, D_n^2)}_{\le 0}$$

$$= \underbrace{\overline{S}(f, D_n)}_{\to \int_a^b f} - \underbrace{\underline{S}(f, D_n)}_{\to \int_a^b f}.$$

Protože je

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \overline{\int_a^c} f, \qquad \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \underline{\int_a^c} f$$

a $\lim_{n\to\infty}(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)) = 0$, máme odtud

$$\overline{\int_a^c} f = \underline{\int_a^c} f,$$

a tedy $f \in \mathcal{R}([a,c])$. Analogicky je $f \in \mathcal{R}([c,b])$. □

Poznámka 63. Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0,$$

pokud alespoň dva z integrálů jsou definované.

Věta 102 (Absolutní hodnota a Riemannův integrál)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Pak $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ a platí*

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Z $f \in \mathcal{R}([a,b])$ máme, že f je na $[a,b]$ omezená.

👁 Nechť $I \subseteq [a,b]$ je neprázdný interval. Potom platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(x)| > \sup_I |f| - \varepsilon, \qquad |f(y)| < \inf_I |f| + \varepsilon.$$

Potom platí

$$\begin{aligned} \sup_I |f| - \inf_I |f| &< (|f(x)| + \varepsilon) - (|f(y)| - \varepsilon) = |f(x)| - |f(y)| + 2\varepsilon \\ &\leq |f(x) - f(y)| + 2\varepsilon \leq \sup_I f - \inf_I f + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

čímž je pozorování dokázáno.

Nechť $\mathcal{D}$ je dělení intervalu $[a,b]$. Potom platí

$$0 \leq \overline{S}(|f|, \mathcal{D}) - \underline{S}(|f|, D) \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}) - \underline{S}(f, \mathcal{D}),$$

takže f je riemannovsky integrovatelná díky větě 95. Zbývá dokázat nerovnost.

Pro každé $x \in [a,b]$ platí

$$f(x) \leq |f(x)|.$$

Odtud podle věty 100 máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Dále platí

$$-\int_a^b f \overset{V.99}{=} \int_a^b (-f) \leq \int_a^b |-f| = \int_a^b |f|.$$

Proto je

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

□

Věta 103 (Derivace funkce horní meze)**.** *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval a f je funkce definovaná na J splňující $f \in \mathcal{R}([a,b])$ pro každé $a, b \in J$. Nechť $c \in J$. Definujeme funkci F na J předpisem*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in J.$$

Potom platí:

(a) F je spojitá na J,

(b) jestliže x_0 je vnitřním bodem intervalu J a f je spojitá v x_0, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důkaz.

(a) Nechť $x_0 \in J$ a není pravým koncovým bodem J. Dokážeme, že

$$\lim_{x \to x_0+} F(x) = F(x_0).$$

Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $x_0 + \delta \in J$. Platí, že $f \in \mathcal{R}([x_0, x_0 + \delta])$. Proto lze nalézt $K > 0$ takové, že

$$\forall t \in [x_0, x_0 + \delta] : |f(t)| \leq K.$$

Pro $x \in [x_0, x_0 + \delta]$ platí

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_{x_0}^x K\,\mathrm{d}t = K(x - x_0) \\
&\implies \lim_{x \to x_0+} |F(x) - F(x_0)| = 0 \implies \lim_{x \to x_0+} F(x) = F(x_0).
\end{aligned}$$

Limita zleva se dokazuje analogicky.

(b) Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq J$ a

$$\forall t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Chceme dokázat, že

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Pro $x \in P(x_0, \delta)$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{\int_c^x f - \int_c^{x_0} f}{x - x_0} - f(x_0) \right| \\
&= \left| \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0} - f(x_0) \right| \\
&= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0) \cdot |x - x_0| \right| \\
&= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{1}{|x - x_0|} \cdot |x - x_0| \cdot \varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Důsledek 7 (Newtonova–Leibnizova formule)**.**

(a) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu (a, b). Potom f má na (a, b)

primitivní funkci.

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$ a F je primitivní funkce k f na (a, b). Potom existují vlastní limity $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$ a platí

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Důkaz.

(a) f je spojitá na intervalu (a, b). Pokud $\alpha, \beta \in (a, b), \alpha < \beta$, potom $f \in \mathcal{R}([a, b])$ podle věty 97. Zvolme $c \in (a, b)$. Potom podle věty 103(b) platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, kde $F(x) = \in_c^x f$. F je tedy primitivní funkcí k f na (a, b).

(b) Definujme pomocnou funkci

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a), & t \in (a-1, a), \\ f(t), & t \in [a, b], \\ f(b), & t \in (b, b+1). \end{cases}$$

Funkce $\tilde{f}$ je spojitá na intervalu $(a-1, b+1)$. Položme

$$G(x) = \int_a^x \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a-1, b+1).$$

Podle věty 103(b) dostáváme, že pro každé $x \in (a-1, b+1)$ platí $G'(x) = \tilde{f}(x)$. Odtud plyne, že $G|_{(a,b)}$ je primitivní funkce k f. Existuje tedy $c \in \mathbb{R}$ takové, že $G = F + c$ na (a, b). G je spojitá na $(a-1, b+1)$. Platí tedy

$$\lim_{x\to a+} G(x) = G(a), \qquad \lim_{x\to b-} G(x) = G(b).$$

Potom

$$\lim_{x\to a+} F(x) = \lim_{x\to a+} (G(x) - c) = G(a) - c \in \mathbb{R}.$$

Podobně

$$\lim_{x\to b-} F(x) = \lim_{x\to b-} (G(x) - c) = G(b) - c \in \mathbb{R}.$$

Pak je

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= G(b) = G(b) - \underbrace{G(a)}_{=0} \\ &= \left(\lim_{x\to b-} F(x) + c\right) - \left(\lim_{x\to a+} F(x) + c\right) \\ &= \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x). \end{aligned}$$

□

Věta 104 (Riemannovská integrovatelnost a změna v konečně mnoha bodech). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Jestliže g je funkce definovaná alespoň na $[a, b]$, která se na intervalu $[a, b]$ liší od f v konečném počtu bodů, pak $g \in \mathcal{R}([a, b])$ a*

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 105 (Riemannova a Darbouxova definice integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je funkce definovaná na intervalu $[a, b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.*

(i) Funkce f je Riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$.

(ii) Existuje $I \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ splňující: je-li $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení intervalu $[a, b]$ takové, že $\nu(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, pak

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

8.3 Newtonův integrál

Definice 80. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) **Newtonův integrál**, případně že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F,
- existují limity $\lim_{x \to a+} F(x)$ a $\lim_{x \to b-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní),
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny $\mathbb{R}^*$.

Definice 81. Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbb{R}^*$ určený výrazem

$$\lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pokud $a > b$, položíme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) **konverguje**, v opačném případě říkáme, že **diverguje**.

Označení. Jestliže je potřeba rozlišit mezi Newtonovým a Riemannovým integrálem z funkce f na intervalu s krajními body a a b, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, budeme používat označení

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{a} \qquad (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 106 (Linearita Newtonova integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^\star$, $a < b$, a $\alpha \in \mathbb{R}$ Newtonův integrál funkcí f, g existuje na (a, b). Pak*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

pokud je výraz napravo definován. Dále platí

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pokud je výraz napravo definován.

Důkaz. Označme F primitivní funkci k f na (a, b) a G funkci primitivní k g na (a, b). Pak je funkce $F + G$ primitivní k funkci $f + g$ na (a, b). Protože je $\left([F]_a^b + [G]_a^b\right) \in \mathbb{R}^*$, máme podle věty o aritmetice limit 29, že

$$[F]_a^b + [G]_a^b = [F + G]_a^b \in \mathbb{R}^*.$$

Obdobně mějme primitivní funkci αF k funkci αf na intervalu (a, b). Protože je $\alpha \cdot [F]_a^b \in R^*$, dostáváme, že $[\alpha F]_a^b \in R^*$ a $[\alpha F]_a^b = \alpha [F]_a^b$. □

Věta 107 (Newtonův integrál a uspořádání). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^\star$, $a < b$, a Newtonův integrál funkcí f, g existuje na (a, b). Nechť platí $f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Označme funkce F, G jako ve větě 106. Pak pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$(G - F)'(x) = g(x) - f(x) \ge 0,$$

tedy $G - F$ je neklesající na (a, b). Proto máme

$$\lim_{x \to a+} (G(x) - G(x)) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \qquad \lim_{x \to b-} (G(x) - F(x)) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Je tedy

$$\int_a^b (g - f) = [G - F]_a^b \ge 0.$$

Dále rozdělíme na dva případy.

(1) $\int_a^b f = -\infty$. Nerovnost $\int_a^b f \le \int_a^b g$ triviálně platí.

(2) $\int_a^b f > -\infty$. Počítejme

$$\int_a^b g = \int_a^b ((g - f) + f) = \underbrace{\int_a^b (g - f)}_{\ge 0} + \underbrace{\int_a^b f}_{> -\infty} \ge \int_a^b f,$$

přičemž víme, že výraz $\int_a^b (g-f) + \int_a^b f$ je definován. □

Věta 108 (Aditivita Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}^\star$, $a < c < b$.*

(a) Jestliže existuje Newtonův integrál funkce f na intervalu (a,b), potom existují integrály funkce f na intervalech (a,c) a (c,b) a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{17}$$

(b) Jestliže existují Newtonovy integrály funkce f na intervalech (a,c) a (c,b) a f je spojitá v c, pak platí (17), pokud má pravá strana smysl.

Důkaz.

(a) Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b). Funkce F je spojitá v bodě c, neboť $F'(c) = f(c) \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x\to c+} F(x) = F(c) \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to c-} F(x) = F(c) \in \mathbb{R}.$$

Dále je

$$\int_a^c f = [F]_a^c = \lim_{x\to c-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x) = \underbrace{F(c)}_{\in\mathbb{R}} - \underbrace{\lim_{x\to a+} F(x)}_{\in\mathbb{R}^*},$$

kde poslední člen je v $\mathbb{R}^*$, neboť $[F]_a^b \in \mathbb{R}^*$. Podobně i $\int_c^b F(x) \in R^*$. Potom

$$\int_a^c f + \int_c^b = F(c) - \lim_{x\to a+} F(x) + \lim_{x\to b-} F(x) - F(c) = \int_a^b f(x).$$

(b) Označme F primitivní funkci k f na (a,c) a G primitivní funkci k f na (c,b). Funkce f je spojitá v c, takže existují $K > 0$, $\delta > 0$ taková, že

$$\forall x \in B(c,\delta) : |f(x)| < K.$$

Pro každé $x \in (c-\delta, c)$ platí

$$-K(x-c+\delta) = \int_{c-\delta}^x -K \leq \int_{c-\delta}^x f = F(x) - F(c-\delta) \leq \int_{c-\delta}^x K = K(x-c+\delta).$$

Máme tedy

$$-K(x-c+\delta) + F(c-\delta) \leq F(x) \leq K(x-c+\delta) + F(c-\delta),$$

a proto $\lim_{x\to c-} F(x) \in \mathbb{R}$ díky těmto nerovnostem a díky tomu, že víme, že limita existuje. Podobně platí $\lim_{x\to c+} G(x) \in \mathbb{R}$. Definujme funkci $H : (a,b) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a,c), \\ \lim_{x\to c-} F(x), & x = c, \\ G(x) - \lim_{x\to c+} G(x) + \lim_{x\to c-} F(x), & x \in (c,b). \end{cases}$$

Pak je $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a,c) \cup (c,b)$. Funkce H je spojitá v bodě c a $\lim_{x\to c} H'(x) = \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Proto platí $H'(c) = f(c)$. Potom platí

$$[H]_a^c + [H]_c^b = [H]_a^b = \int_a^b f.$$

$\square$

Věta 109 (Newtonův integrál a basolutní hodnota)**.** *Nechť $a,b \in \mathbb{R}^\star$, $a < b$, a f má Newtonův integrál na intervalu (a,b) a f je spojitá na (a,b). Pak $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ existuje a*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Označme F primitivní funkci k $|f|$ na (a,b) (ta existuje, neboť $|f|$ je spojitá). Protože je $|f| \geq 0$ a $F' = |f|$, dostáváme, že F je neklesající, a tedy $[F]_a^b$ je definována podle věty o limitě monotónní funkce 35. Navíc platí $[F]_a^b \geq 0$. Podle věty 107 platí

$$-\int_a^b |f| \overset{\text{V106}}{=} \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

Dostáváme tedy $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$. $\square$

Věta 110 (Per partes pro Newtonův integrál)**.** *Nechť $a,b \in \mathbb{R}^\star$, $a < b$, f a g jsou funkce definované na (a,b). Nechť F je primitivní funkce k funkci f na (a,b) a G je primitivní funkce k funkci g na (a,b). Potom platí*

$$\int_a^b Fg = [FG]_a^b - \int_a^b fG,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Důkaz. Označme H primitivní funkci k funkci fG na (a,b). Počítejme

$$(FG - H)' = fG + Fg - fG = Fg, \qquad \text{na}(a,b).$$

Pak je

$$\int_a^b Fg = [FG - H]_a^b$$

a $[FG]_a^b - [H]_a^b \in \mathbb{R}^*$ podle předpokladu. Podle věty o aritmetice limit máme

$$[FG - H]_a^b = [FG]_a^b - [H]_a^b.$$

$\square$

Věta 111 (Substituce pro Newtonův integrál). *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star$, $a < b$, $\alpha < \beta$, f je funkce definovaná na (a, b) a φ je funkce definovaná na (α, β). Nechť φ má vlastní nenulovou derivaci na (α, β) a platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

jestliže má alespoň jedna strana smysl.

Důkaz. Funkce φ' má Darbouxovu vlastnost, a proto nemění znaménko na (α, β). Odtud plyne, že φ je ryze monotónní. Nejprve předpokládejme, že φ je klesající. Předpokládejme dále, že $\int_a^b f$ existuje. Označme F primitivní funkci k funkci f na intervalu (a, b). Potom $-F \circ \varphi$ je primitivní k funkci $-f \circ \varphi \cdot \varphi' = f \circ \varphi |\varphi'|$. Platí $\lim_{t \to \alpha+} \varphi(t) = b$ a $\lim_{t \to \beta-} \varphi(t) = a$. Dále je

$$\lim_{t \to \alpha+} (-F \circ \varphi(t)) = -\lim_{x \to b-} F(x)$$

podle věty o limitě složené funkce s podmínkou (P). Obdobně

$$\lim_{t \to \beta-} (-F \circ \varphi(t)) = -\lim_{x \to a+} F(x).$$

Nakonec dostáváme

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(-\varphi'(t))\,\mathrm{d}t = [-F(\varphi(t))]_\alpha^\beta \\ &= -\lim_{x \to a+} F(x) + \lim_{x \to b-} F(x) = [F]_a^b = \int_a^b f. \end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$ existuje. Nechť G je primitivní funkce k funkci $f \circ \varphi \cdot |\varphi'| = -f \circ \varphi \cdot \varphi'$. Potom $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní k funkci f na (a, b) podle věty 91. Potom platí $\lim_{x \to a+} \varphi^{-1}(x) = \beta$ a $\lim_{x \to b-} \varphi^{-1}(x) = \alpha$. Dále je $\lim_{x \to a+} -G(\varphi^{-1}(x)) = -\lim_{t \to \beta-} G(t)$ a $\lim_{x \to b-} -G(\varphi^{-1}(x)) = -\lim_{t \to \alpha+} G(t)$. Konečně máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [-G \circ \varphi^{-1}]_a^b = -\lim_{t \to \alpha+} G(t) + \lim_{t \to \beta-} G(t) = \int_a^b f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Případ φ rostoucí dokážeme analogicky. $\square$

Věta 112 (Bolzanova–Cauchyova podmínka pro funkce). *Nechť $a \in \mathbb{R}^\star$, $\delta_0 > 0$, a funkce F je definována alespoň na $P(a, \delta_0)$. Potom existuje vlastní $\lim_{x \to a} F(x)$ právě tehdy, když je* *splněna následující (tzv. Bolzanova–Cauchyova) podmínka:*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in P(a, \delta) : |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Důkaz. $\implies$ Označme $A = \lim_{x \to a} F(x)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta < 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta) : |F(x) - A| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Potom pro každé $x, y \in P(a, \delta)$ platí

$$|F(x) - F(y)| \leq |F(X) - A| + |A - F(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

$\impliedby$ Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $P(a, \delta_0)$ splňující $\lim x_n = A$. Ověříme, že $\{F(x_n)\}$ splňuje BC-podmínku. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme podle předpokladu $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x, y \in P(a, \delta) : |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_N \in P(a, \delta)$. Potom pro každé $n, m \geq n_0$ platí

$$|F(x_n) - F(x_m)| < \varepsilon.$$

Podle věty 26 existuje vlastní limita $\lim_{n \to \infty} F(x_n)$. Označme ji A.

Zvolme posloupnost $\{y_n\}$ prvků $P(a, \delta_0)$ splňující $\lim y_n = a$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x, y \in P(a, \delta) : |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Nalezneme $n^\star$ takové, že pro každé $n \geq n^\star$ platí $x_n \in P(a, \delta)$, $y_n \in P(a, \delta)$ a $|F(x) - A| < \varepsilon$. Potom pro každé $n \geq n^\star$ platí

$$|F(y) - A| \leq \underbrace{|F(y_n) - F(x_n)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|F(x_n) - A|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon.$$

Potom podle Heineovy věty 34 dostáváme $\lim_{x \to a} F(x) = A$. $\square$

Poznámka 64. Analogické tvrzení platí i pro jednostranné limity.

Věta 113 (Konvergence integrálu omezené funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená spojitá funkce na (a, b). Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Důkaz. Podle věty 86 má funkce f na (a, b) funkci primitivní. Označme ji F. Ukážeme, že $\lim_{x \to a+} F(x)$ existuje vlastní. Nalezneme $K > 0$ takové, že

$$\forall x \in (a, b) : |f(x)| < K.$$

(f je omezená na (a,b)). Ověříme BC-podmínku pro F v a zprava. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $K\delta < \varepsilon$. Potom pro každé x, y splňující $a < x < y < a + \delta$ platí

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f \right| \leq \int_x^y |f| \leq \int_x^y K = K(y - x) < K\delta < \varepsilon.$$

(F je spojitá na (a,b), a tedy i na $[x,y]$). Odtud podle věty 112 plyne $\lim_{x\to a+} F(x) \in \mathbb{R}$. Případ $\lim_{x\to b-} F(x) \in \mathbb{R}$ ověříme analogicky. Celkem tedy dostáváme, že $f \in \mathcal{N}(a,b)$. □

Věta 114 (Vztah Riemannova a Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f má Riemannův integrál na $[a,b]$ a Newtonův integrál na (a,b). Potom*

$$(R)\int_a^b f = (N)\int_a^b f.$$

Věta 115 (Srovnávací kritérium)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in [a,b)$. Nechť dále je f spojitá na $[a,b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a,b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$.*

Důkaz. Zvolme $c \in [a,b)$. Označme F, G primitivní funkce k funkcím f, g na intervalu $[a,b)$. Můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na intervalu (a,b) nezápornou derivaci a je zde spojitá. Potom máme, že $G - F$ je neklesající. Potom pro každé $x \in [c,b)$ platí $G(x) \geq F(x)$. Potom platí

$$\underbrace{\lim_{x\to b-} F(x)}_{F'=f\geq 0 \implies F \text{ je neklesající}} \leq \underbrace{\lim_{x\to b-} G(x)}_{\in \mathbb{R}\ (g\in\mathcal{N}(a,b))}.$$

Proto je $\lim_{x\to b-} F(x) \in \mathbb{R}$. F je spojitá v c, a proto $\lim_{x\to c+} F(x) \in \mathbb{R}$. Celkem tedy máme, že $f \in \mathcal{N}(c,b)$. Protože je f omezená a spojitá na $[a,c]$, máme, že $F \in \mathcal{N}(a,c)$ podle věty 113. Potom podle věty 108 dostáváme $f \in \mathcal{N}(a,b)$. □

Věta 116 (Limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f, g jsou spojité nezáporné funkce na $[a,b)$. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0,\infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a,b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a,b)$.*

Důkaz. $\implies$ Podle definice limity nalezneme $x_0 \in (a,b)$ takové, že pro každé $x \in [x_0,b)$ platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{2}c, \qquad \text{kde } c = \lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Potom máme, že $f(x) > \frac{1}{2}g(x) \geq 0$. Odtud podle věty 115 máme

$$\frac{1}{2}cg \in \mathcal{N}(x_0,b).$$

Proto je $g \in \mathcal{N}(x_0,b)$ a $g \in \mathcal{N}(a,x_0)$. Potom je podle věty 113 $f \in \mathcal{N}(a,b)$.

$\Longleftarrow$ Analogicky. □

Poznámka 65. Označme $\lim_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)} = c$. Případ $c \in (0,\infty)$ ošetřuje věta. Případ $c = 0$ nám dává jen $\int_a^b g$ konverguje $\implies$ $\int_a^b f$ konverguje. Případ $c = \infty$ naopak dává $\int_a^b f$ konverguje $\implies$ $\int_a^b g$ konverguje.

Lemma 6 (Odhad integrálu $\int_a^b fg$). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je spojitá funkce na $[a,b]$ a $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá funkce. Potom*

$$g(a) \inf_{x\in[a,b]} \int_a^x f \leq \int_a^b fg \leq g(a) \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x f.$$

Speciálně platí

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq g(a) \sup_{x\in[a,b]} \left|\int_a^x f\right|.$$

Důkaz. Označme $F(x) = \int_a^x f$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta$ platí

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| < \varepsilon, \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(f a g jsou spojité na $[a,b]$, a tedy stejnoměrně spojité.) Zvolme dělení $D = \{x_j\}_{j=1}^n$ intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom máme

$$F(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) \leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} f + \varepsilon(x_j - x_{j-1}),$$

protože $f(x_{j-1} \leq f(t) + \varepsilon$, $t \in [x_{j-1}, x_j]$. Dále je

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} fg \leq f(x_{j-1})f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) + \varepsilon(x_j - x_{j-1}),$$

neboť $f(x_{j-1})g(x_{j-1}) \leq f(t)g(t) + \varepsilon$, $t \in [x_{j-1}, x_j]$. Máme tedy

$$\begin{aligned}
\int_{x_{j-1}}^{x_j} fg &\leq g(x_{j-1})\left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} f + \varepsilon(x_j - x_{j-1})\right) + \varepsilon(x_j - x_{j-1}) \\
&= g(x_{j-1})\int_{x_{j-1}}^{x_j} f + g(x_{j-1})\varepsilon(x_j - x_{j-1}) + \varepsilon(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq g(x_{j-1})\int_{x_{j-1}}^{x_j} f + (g(a)+1)\varepsilon(x_j - x_{j-1}), \qquad j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Označme $\varepsilon^\star = \varepsilon(g(a)+1)(b-a)$. Pak

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\
&\le \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i - x_{i-1})(g(a)+1) \\
&= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(g(a)+1)(b-a) \\
&= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) + \varepsilon^* \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)\underbrace{(g(x_{i-1}) - g(x_i))}_{\ge 0} + \underbrace{g(x_{n-1})}_{\ge 0} F(x_n) - \underbrace{g(x_0)F(x_0)}_{=F(a)=0} + \varepsilon^* \\
&\le \sum_{i=1}^{n-1} \sup_{[a,b]} F \cdot (g(x_{i-1} - g(x_i)) + \sup_{[a,b]} F \cdot g(x_{n-1}) + \varepsilon^* \\
&= \sup_{[a,b]} F \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1}) \right) + \varepsilon^* \\
&= \sup_{[a,b]} F \cdot \underbrace{g(x_0)}_{g(a)} + \varepsilon^*.
\end{aligned}
$$

Tím je nerovnost dokázána. Nerovnost pro infimum se dokáže obdobně. □

Věta 117 (První věta o střední hodnotě). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je spojitá funkce na $[a,b]$, g je nezáporná funkce na $[a,b]$, $g \in \mathcal{N}(a,b)$ a $fg \in \mathcal{N}(a,b)$. Potom existuje $c \in [a,b]$ takové, že*

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

Důkaz. Označme m minimum f na $[a,b]$ a M maximum f na $[a,b]$. Pro každé $x \in [a,b]$ platí

$$mg(x) \le g(x)f(x) \le Mg(x).$$

Potom platí

$$m \int_a^b g \le \int_a^b fg \le M \int_a^b g. \tag{18}$$

Rozlišíme dvě možnosti.

(1) $\int_a^b g = 0$. Je $\int_a^b g = [G]_a^b = 0$, G neklesající. Kdyby existoval bod $x_0 \in [a,b]$ takový, že $g(x_0) > 0$, pak $G'(x_0) > 0$. Pak $[G]_a^b > 0$, což je spor. Odtud plyne, že $g = 0$ na (a,b). Pak je i $\int_a^b fg = 0$ a za bod c volíme libovolný bod z (a,b).

(2) $\int_a^b g > 0$. Pak podle (18) platí

$$m \le \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \le M.$$

Poněvadž $f([a,b]) = [m,M]$, existuje $c \in [a,b]$ splňující

$$f(c) = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g},$$

a tedy po vynásobení dostaneme

$$\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Věta 118 (Druhá věta o střední hodnotě). *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je spojitá funkce na $[a,b]$, g je monotónní a spojitá funkce na $[a,b]$. Potom existuje $c \in [a,b]$ takové, že*

$$\int_a^b fg = g(a)\int_a^c f + g(b)\int_c^b f. \tag{2}$$

Důkaz. Položme

$$\psi(y) = g(a)\int_a^y f + g(b)\int_y^b f, \qquad y \in [a,b].$$

Platí

$$\psi(y = (g(a) - g(b))\int_a^y f + g(b)\int_a^b f, \qquad y \in [a,b].$$

Funkce ψ je spojitá na intervalu $[a,b]$. Nalezneme $y_1 \in [a,b]$ bod maxima funkce ψ. Podle lemmatu 6 platí

$$\int_a^b (g(t) - g(b))f(t)\,\mathrm{d}t \le (g(a) - g(b)) \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x f.$$

Budeme předpokládat, že g je nerostoucí. Platí tedy, že funkce $t \mapsto g(t) - g(b)$ je nerostoucí a nezáporná na $[a,b]$. Potom platí

$$\int_a^b fg \le (g(a) - g(b)) \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x f + g(b)\int_a^b f = \psi(y_1).$$

Obdobně nalezneme y_2 – bod minima ψ na $[a,b]$ a odvodíme

$$\psi(y_2) \le \int_a^b fg.$$

Odtud plyne, že existuje $c \in [a,b]$ takové, že $\psi(c) = \int_a^b fg$.

Pokud je g neklesající, pak stačí přejít k funkci $-g$. Bod c, který nalezneme pro $-g$, bude „fungovat“ i pro g. □

8.4 Aplikace určitého integrálu

Definice 82. **Křivkou** budeme rozumět zobrazení

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je φ_i spojitá funkce na $[a, b]$.

Křivkou třídy $\mathcal{C}^1$ rozumíme křivku $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ takovou, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je φ_i' spojitá funkce na $[a, b]$, přičemž v krajních bodech $[a, b]$ symbol $\varphi_i'(x)$ značí příslušnou jednostrannou derivaci.

Definice 83. Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je křivka. **Délkou křivky** φ rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup \{L(\varphi, D);\ D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\},$$

kde pro dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ intervalu $[a, b]$ definujeme

$$L(\varphi, D) = \sum_{j=1}^{k} \text{vzdálenost}\big(\varphi(x_{j-1}), \varphi(x_j)\big).$$

Věta 119 (Délka křivky)**.** *Nechť $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je křivka třídy $\mathcal{C}^1$. Pak platí*

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \dots + (\varphi_n'(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$

Věta 120 (Integrální kritérium)**.** *Nechť f je nezáporná nerostoucí spojitá funkce na $[n_0, \infty)$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_n = f(n), n \geq n_0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$ konverguje.*

Kapitola 9

Metrické prostory I

9.1 Základní vlastnosti

Definice 84. **Metrickým prostorem** rozumíme dvojici (P, ϱ), kde P je množina, $\varrho : P \times P \to [0, \infty)$ je funkce splňující:

(a) $\forall x, y \in P : \varrho(x, y) = 0 \iff x = y$,

(b) $\forall x, y \in P : \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,

(c) $\forall x, y, z \in P : \varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Funkci ϱ nazýváme **metrika na** P.

Příklad.

(1) $(\mathbb{R}^n, \varrho_e)$, kde

$$\varrho_e(x, y) = \varrho_e((x_1, \dots, x_n, (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

je euklidovská metrika (někdy taky l_2-metrika).

(2) $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$, kde

$$\varrho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

je l_1-metrika (newyorská metrika).

(3) $(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty)$, kde

$$\varrho_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i|, i \in \{1, \dots, n\}\}$$

je maximová metrika (l_∞-metrika).

(4) $(\mathscr{C}([a,b]), \varrho_{\sup})$ je prostor spojitých funkcí na $[a,b]$, kde

$$\varrho_{\sup}(f,g) = \sup_{[a,b]} |f-g| = \sup\{|f(x)-g(x)|, x \in [a,b]\}$$

je supremová metrika.

(5) $(\mathscr{C}([a,b]), \varrho_i$, kde

$$\varrho_i(f,g) = \int_a^b |f-g|$$

je integrální metrika.

(6) (P, ϱ_d), kde

$$\varrho_d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y, \\ 1 & x = y. \end{cases}$$

je diskrétní metrika.

Definice 85. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ prvků P **konverguje** k prvku $x \in P$ v prostoru (P,ϱ), jestliže platí $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$. Prvek x nazýváme **limitou posloupnosti** $\{x_n\}$ **v** (P,ϱ). **Konvergentní posloupností v** (P,ϱ) rozumíme posloupnost, která má limitu v (P,ϱ).

Definice 86. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků metrického prostoru (P,ϱ). Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak říkáme, že $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je **podposloupnost** posloupnosti $\{x_n\}$, případně **vybranou posloupností** z posloupnosti $\{x_n\}$.

Věta 121 (Vlastnosti konvergence)**.** *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P.*

(a) Pak má posloupnost $\{x_n\}$ v (P,ϱ) nejvýše jednu limitu.

(b) Jestliže existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ taková, že $x_n = x$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, potom je x limitou posloupnosti $\{x_n\}$.

(c) Nechť $\{x_{n_k}\}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{x_n\}$. Jestliže $x \in P$ je limitou posloupnosti $\{x_n\}$ v (P,ϱ), pak x je také limitou posloupnosti $\{x_{n_k}\}$.

Důkaz.

(a) Předpokládejme, že $x, y \in P$ jsou limity $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom platí

$$\varrho(x,y) \leq \underbrace{\varrho(x,x_n)}_{\to 0} + \underbrace{\varrho(x_n,y)}_{\to 0},$$

a proto $\varrho(x,y) \leq 0$, a tedy $\varrho(x,y) = 0$, a tedy $x = y$, což jsme chtěli dokázat.

(b) Pro každé $n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n,x) = \varrho(x,x) = 0$. Odtud máme $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n,x) = 0$, a tedy x je limitou $\{x_n\}$.

(c) Posloupnost $\{\varrho(x_{n_k},x)\}$ je vybraná z $\{\varrho(x_n,x)\}$. Protože je $\lim \varrho(x_n,x) = 0$, pak i $\lim \varrho(x_{n_k},x) = 0$, tedy x je limita $\{x_{n_k}\}$. $\square$

Označení. Pokud je posloupnost $\{x_n\}$ konvergentní v metrickém prostoru (P,ϱ), pak je podle věty 121 (a) její limita určena jednoznačně a budeme ji značit $\lim_{n\to\infty} x_n$ nebo jen $\lim x_n$. Pokud $\lim x_n = x$, pak také píšeme $x_n \xrightarrow{\varrho} x$, $n\to\infty$, případně $x_n \xrightarrow{\varrho} x$ nebo pouze $x_n \to x$.

Definice 87. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Řekneme, že množina M je **uzavřená** v (P,ϱ), jestliže pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny M je limita této posloupnosti prvkem M.

Věta 122 (Vlastnosti uzavřených množin)**.** *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor.*

(a) Prázdná množina a celý prostor P jsou uzavřené množiny v (P,ϱ).

(b) Nechť $\mathcal{F}$ je neprázdný systém uzavřených množin. Potom je množina $\bigcap\mathcal{F}$ uzavřená v (P,ϱ).

(c) Nechť $m\in\mathbb{N}$. Předpokládejme, že množiny $F_1,\dots,F_m$ jsou uzavřené. Potom je množina $\bigcup_{i=1}^m F_i$ uzavřená v (P,ϱ).

Důkaz.

(a) Zřejmé.

(b) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $\bigcap\mathcal{F}$ a platí $\lim x_n = x \in P$. Zvolme $F\in\mathcal{F}$. Potom $\{x_n\}$ je posloupnost prvků F. F je podle předpokladu uzavřená, takže $x\in F$. Proto i $x\in\bigcap\mathcal{F}$.

(c) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $\bigcup_{i=1}^m F_i$ a platí $\lim x_n = x$. Položme

$$A_i = \{n\in\mathbb{N}, x_n\in F_i\}, \qquad i = 1,\dots,m.$$

Platí $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^m A_i$. Nalezneme $i_0\in\{1,\dots,m\}$ takové, že A_{i_0} je nekonečná. Existuje rostoucí posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ taková, že $A_{i_0} = \{n_k, k\in\mathbb{N}\}$. Potom $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ je vybraná z $\{x_n\}$ a platí $\lim x_{n_k} = x$ (podle věty 122) a pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí $x_{n_k}\in F_{i_0}$. F_{i_0} je uzavřená, a tedy $x\in F_{i_0}\subseteq\bigcup_{i=1}^m F_i$. $\square$

Příklad. Pro $(\mathbb{R}^2,\varrho_\infty)$ se jedná o „otevřený čtverec“. Pro $(\mathbb{R}^2,\varrho_i)$ jedná o otočený otevřený čtverec. Dále př. $(\mathscr{C}([a,b]),\varrho_{\sup})$.

👁 Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, $x\in P, r>0$. Pro každé $y\in B(x,r)$ existuje $s>0$ takové, že $B(y,s)\subseteq B(x,r)$. Stačí volit $0<s<r-\varrho(x,y)$.

Definice 88. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, $x\in P$ a $r>0$. Potom množinu $B(x,r)$ definovanou předpisem

$$B(x,r) = \{y\in P;\ \varrho(x,y)<r\}$$

nazýváme **otevřenou koulí se středem x a poloměrem r**.

Definice 89. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **vnitřním bodem** množiny M, jestliže existuje $r > 0$ takové, že

$$B(x, r) \subset M.$$

Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazýváme **vnitřkem** množiny M a označujeme symbolem $\operatorname{Int} M$.

Řekneme, že množina M je **otevřená** v (P, ϱ), jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Věta 123 (Vlastnosti otevřených množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.*

(a) Prázdná množina a P jsou otevřené množiny v (P, ϱ).

(b) Nechť $\mathcal{G}$ je systém otevřených množin v (P, ϱ). Potom je množina $\bigcup \mathcal{G}$ otevřená v (P, ϱ).

(c) Nechť $m \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že množiny $G_1, \dots, G_m$ jsou otevřené v (P, ϱ). Potom je množina $\bigcap_{i=1}^m G_i$ otevřená v (P, ϱ).

Důkaz.

(a) Plyne z definice otevřené množiny.

(b) Zvolme $x \in \bigcup \mathcal{G}$. Nalezneme z definice sjednocení $G \in \mathcal{G}$ takovou, že $x \in G$. Protože je G otevřená, nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G$. Tedy $B(x, r) \subset \bigcup \mathcal{G}$. Tedy $\bigcup \mathcal{G}$ je otevřená množina v P.

(c) Zvolme $x \in \bigcap_{i=1}^m G_i$. Potom $x \in G_i$ pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}$. Díky otevřenosti G_i nalezneme pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ nalezneme $r_i > 0$ takové, že $B(x, r_i) \subset G_i$. Položme $r = \min\{r_i : i \in \{1, \dots, m\}\}$. Pak $r > 0$ a $\forall i \in \{1, \dots, m\} : B(x, r) \subset G_i$. Tedy $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^m G_i$. Tudíž $\bigcap_{i=1}^m G_i$ je otevřená množina v P. □

Poznámka 66.

(1) V tvrzení (c) věty 123 je důležité, aby počet množin byl *konečný*. Pro nekonečné průniky tvrzení neplatí. Např. $G_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right), i \in \mathbb{N}$, pak sice pro každé $i \in \mathbb{N}$ je G_i otevřená v $\mathbb{R}$, ale $\bigcap_{i=1}^\infty G_i = \{0\}$ není otevřená v $\mathbb{R}$.

Jiné příklady: $G_i = \left(-\frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{i}\right)$, pak $\bigcap G_i = [0, 1]$.

(2) Podle věty 123 (b) je $\operatorname{Int} M$ otevřená množina (pro každou $M \subset P$) a platí

$$\operatorname{Int} M = \bigcup \{B(x, r), x \in M, r > 0, B(x, r) \subset M\}.$$

Věta 124 (Vztah otevřených a uzavřených množin). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom množina M je otevřená právě tehdy, když $P \setminus M$ je uzavřená.*

Důkaz. Dokážeme každou implikaci zvlášť.

$\Longrightarrow$ Předpokládejme, že M je otevřená. Chceme dokázat, že $P \setminus M$ je uzavřená, tj.

$$\{x_n\} \subset (P \setminus M), x_n \to x \in P \implies x \in (P \setminus M).$$

Zvolme $\{x_n\} \subset (P \setminus M)$, nechť $x_n \to x, x \in P$. Předpokládejme, že $x \in M$. Protože M je otevřená, nalezneme $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset M$. Protože $x_n \to x$, nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\varrho(x_{n_0}, x) < r$, tedy $x_{n_0} \in B(x, r) \subset M$. To je spor, neboť $x_{n_0} \in (P \setminus M) \cap M$. Tedy $x \notin M$, tj. $x \in P \setminus M$, takže $P \setminus M$ je uzavřená.

$\Longleftarrow$ Dokážeme nepřímo, tj. předpokládáme, že M není otevřená a dokážeme, že $P \setminus M$ není uzavřená. Předpokládejme, že M není otevřená v P. Nalezneme bod $x \in M \setminus \operatorname{Int} M$. Potom

$$\forall r > 0 : B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset.$$

Speciálně pro $r = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, platí

$$B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme

$$x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap (P \setminus M).$$

Potom $\{x_n\} \subset (P \setminus M)$ a $\varrho(x, x_n) < \frac{1}{n}$, tedy $x_n \to x$ v P. Protože $x \in M$, a tedy $x \notin (P \setminus M)$, plyne odtud, že $P \setminus M$ není uzavřená v P. □

Definice 90. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **hraničním bodem** množiny M, jestliže pro každé $r > 0$ platí

$$B(x, r) \cap M \neq \emptyset \qquad \text{a} \qquad B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset.$$

Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme **hranicí** množiny M a značíme ji ∂M.

Poznámka 67. Hraniční bod nějaké množiny může a nemusí být jejím prvkem.

Definice 91. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Označme $\overline{M} = M \cup \partial M$. Potom množinu $\overline{M}$ nazýváme **uzávěrem** množiny M v prostoru (P, ϱ).

Příklad.

(a) $P = \mathbb{R}$, $M = (0, 1)$, potom $\partial M = \{0, 1\}$ a $\overline{M} = [0, 1]$,

(b) $P = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{Q}$, potom $\partial M = \mathbb{R}$, tedy $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$,

(c) $\operatorname{Int}([0,1]) = (0,1)$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Věta 125 (Vlastnosti uzávěru). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$, $B \subset P$. Pak platí:*

(a) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{P} = P$,

(b) pokud $A \subset B$, pak $\overline{A} \subset \overline{B}$,

(c) $\overline{A}$ je uzavřená.

Důkaz.

(a) Zřejmé.

(b) Předpokládejme, že $x \in \partial A \setminus B$. Chceme dokázat, že $x \in \partial B$. Zvolme $r > 0$. Potom zřejmě

$$B(x,r) \cap (P \setminus B) \neq \emptyset.$$

Protože $x \in \partial A$, platí $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$, tedy tím spíše $B(x,r) \cap B \neq \emptyset$, neboť $A \subset B$. Tedy $x \in \partial B$. Dokázali jsme: $\partial A \setminus B \subset \partial B$. Tudíž

$$\overline{A} = A \cup \partial A \subset B \cup (\partial A \setminus B) \subset B \cup \partial B = \overline{B}.$$

(c) Chceme $\overline{A}$ je uzavřená, tj. $A \cup \partial A$ je uzavřená, jinými slovy chceme, že $\{x_n\} \subset \overline{A}, x_n \to x \in P$, pak $x \in \overline{A}$. Předpokládejme, že $\{x_n\} \subset \overline{A}$, $x_n \to x \in P, x \notin A$. Zvolme $r > 0$. Nalezneme $n_0, \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n \in B\left(x, \frac{r}{2}\right)$. Potom $B\left(x_{n_0}, \frac{r}{2}\right) \cap A \neq \emptyset$, neboť x_n je v A nebo v ∂A. Tedy nalezneme $y \in B\left\{x_{n_0}, \frac{r}{2}\right\} \cap A$. Potom

$$\varrho(x,y) \leq \varrho(x, x_{n_0}) + \varrho(x_{n_0}, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Takže je $y \in B(x,r) \cap A$. Tedy $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$, takže $x \in \partial A$, tudíž $x \in \overline{A}$. Tedy $\overline{A}$ je uzavřená v P. □

9.2 Spojitá zobrazení

Definice 92. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q, $a \in P$ a $M \subset P$. Řekneme, že

- f je **spojité v bodě** a **vzhledem k množině** M, jestliže $a \in M$ a platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M : \varrho(x,a) < \delta \implies \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon;$$

- f je **spojité v bodě** a, jestliže je spojité v a vzhledem k P,
- f je **spojité na** M, jestliže je spojité v každém bodě $b \in M$ vzhledem k M,
- f je **spojité**, jestliže je spojité na P.

Poznámka 68.

(1) Spojitost f závisí na ϱ a σ.

(2) Definice 92 je kompatibilní s prvním semestrem.

Příklad. Vezměme $n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}, i \leq n$ a mějme zobrazení $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$\pi_i(x) = \pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i.$$

Zobrazení π_i je spojité mezi prostory $(\mathbb{R}^n, \varrho_e)$ a $(\mathbb{R}, \sigma)$.

Zvolme $a \in \mathbb{R}^n$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Položíme $\delta = \varepsilon$. Potom pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ je

$$\varrho(x, a) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^2} < \delta,$$

neboť

$$|\pi_(x) - \pi_i(a)| = |x_a - a_i| \leq \varrho_e(x, a) < \delta = \varepsilon.$$

Věta 126 (Charakterizace spojitosti)**.** *Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f : P \to Q$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

(i) Zobrazení f je spojité.

(ii) Pro každou otevřenou množinu G v prostoru (Q, σ) je $f^{-1}(G)$ otevřená v (P, ϱ).

(iii) Pro každou uzavřenou množinu F v prostoru (Q, σ) je $f^{-1}(F)$ uzavřená v (P, ϱ).

Důkaz. Nejprve dokážeme ekvivalenci mezi (i) a (ii).

$\Longrightarrow$ Zvolme množinu $G \subset Q$, G je otevřená (vzhledem k prostoru (Q, σ)). Chceme ukázat, že $f^{-1}(G)$ je otevřená, tedy že pr každý bod $x \in f^{-1}(G)$ je $f(x) \in G$. Nalezneme $\varepsilon > 0$ takové, že $B(f(x), \varepsilon) \subset G$. Díky spojitosti f v x nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in P, \varrho(x, y) < \delta : \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Odtud plyne, že $B(x, \delta) \subset f^{-1}(G)$, a tedy x je vnitřní bod množiny $f^{-1}(G)$.

$\Longleftarrow$ Zvolme $a \in P$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Množina $B(f(a), \varepsilon)$ je otevřená v (Q, σ). Odtud plyne, že $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ je otevřená v (P, ϱ) a bod $a \in f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)).$$

Platí tedy

$$\forall y \in B(a, \delta) : f(y) \in B(f(a), \varepsilon).$$

Dále dokážeme ekvivalenci (ii) a (iii).

$\Longrightarrow$ Vezměme $F \subseteq Q$, F uzavřená v (Q, σ). Víme, že $f^{-1}(Q \setminus F)$ je otevřená v (P, ϱ), neboť i $Q \setminus F$ je otevřená v (Q, σ). Proto je

$$f^{-1}(F) = P \setminus \underbrace{f^{-1}(Q \setminus F)}_{\text{otevřená}}$$

uzavřená, což jsme chtěli dokázat.

$\Longleftarrow$ Vezměme $G \subset Q$ otevřenou množinu. Pak je $Q \setminus G$ uzavřená, a tedy $f^{-1}(Q \setminus G)$ je uzavřená v (P, ϱ). proto je

$$f^{-1}(G) = P \setminus \underbrace{f^{-1}(Q \setminus G)}_{\text{uzavřená}}$$

otevřená, což jsme chtěli dokázat. □

Definice 93. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $M \subset X$ a $x \in X$. Řekneme, že x je **hromadným bodem množiny** M, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$M \cap (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Množinu všech hromadných bodů množiny M značíme M'. Body z $M \setminus M'$ nazýváme **izolovanými body množiny** M.

Příklad.

(1) $(0, 1)' = [0, 1]$

(2) $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}' = \{0\}$

Definice 94. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q, $A \subset P$ a $a \in A'$. Řekneme, že prvek $b \in Q$ je **limitou zobrazení** f **v bodě** a **vzhledem k množině** A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A,\ \ x \neq a : \varrho(x, a) < \delta \implies \sigma(f(x), b) < \varepsilon.$$

Je-li $A = P$, říkáme, že f má v bodě a **limitu** b.

Poznámka 69. Při označení z předchozí definice má f v a vzhledem k A nejvýše jednu limitu.

Označení. Pokud limita f v bodě a vzhledem k A existuje, pak ji značíme $\lim_{x \to a, x \in A} f(x)$. Místo $\lim_{x \to a, x \in X} f(x)$ píšeme jen $\lim_{x \to a} f(x)$.

Věta 127 (Heine). *Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q, $A \subset \mathcal{D}(f)$, $a \in A'$, $b \in Q$. Potom jsou následující dvě tvrzení ekvivalentní:*

(i) $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = b$,

(ii) *pro každou posloupnost* $\{x_n\}$ *prvků množiny* $A \setminus \{a\}$, *která splňuje* $\lim x_n = a$, *platí* $\lim f(x_n) = b$.

Věta 128 (Spojitost složeného zobrazení v bodě). *Nechť* (X, ϱ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y *a* g *je zobrazení z* Y *do* Z. *Nechť* $A \subset X$, $a \in A$, $B \subset Y$, $f(a) \in B$ *a platí:*

- *existuje* $\delta > 0$ *takové, že* $f(B(a, \delta) \cap A) \subset B$,
- f *je spojité v bodě* a *vzhledem k* A,
- g *je spojité v bodě* $f(a)$ *vzhledem k* B.

Pak zobrazení $g \circ f$ *je spojité v bodě* a *vzhledem k* A.

Důkaz. Samostatně. □

Věta 129 (Spojitost složeného zobrazení). *Nechť* (X, ϱ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory,* $f : X \to Y$ *a* $g : Y \to Z$ *jsou spojitá zobrazení. Pak zobrazení* $g \circ f : X \to Z$ *je spojité.*

Důkaz. Vezměme $G \subset Z$, G otevřenou. Pak je množiny

$$(g \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(G)}_{\text{otevřená}})$$

otevřená, a tedy podle věty 126 je $g \circ f$ spojité zobrazení. □

Věta 130 (Limita složeného zobrazení). *Nechť* (X, ϱ), (Y, σ) *a* (Z, ω) *jsou metrické prostory,* f *je zobrazení z* X *do* Y *a* g *je zobrazení z* Y *do* Z. *Nechť* $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ *a platí:*

- *existuje* $\delta > 0$ *takové, že* $f((A \cap B(a, \delta)) \setminus \{a\}) \subset B$,
- $\lim_{x \to a,\, x \in A} f(x) = b$,
- $\lim_{y \to b,\, y \in B} g(y) = c$.

Pokud dále platí jedna z podmínek

(P) *existuje* $\eta > 0$ *takové, že pro každé* $x \in B(a, \eta) \cap A$, $x \neq a$, *platí* $f(x) \neq b$,

(S) *zobrazení* g *je spojité v bodě* b *vzhledem k* B,

pak

$$\lim_{x \to a,\, x \in A} g \circ f(x) = c.$$

Důkaz. Samostatně. □

Kapitola 10

Funkce více proměnných I

Označení.

- $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{k \text{ krát}}$
- $x \in \mathbb{R}^n$ znamená, že $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$
- $e^i = [0, 0, \dots, 0, \underset{i-\text{tý}}{1}, 0, \dots, 0]$
- $o = [0, \dots, 0]$
- $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$
- někdy píšeme $\rho_e(x, y) = \|x - y\|$

Definice 95. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $1 \leq i \leq n$. Pak **parciální derivaci funkce f v bodě a podle i-té proměnné** definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}.$$

Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme **parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné**, tj. funkci definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Poznámka 70.

(1) Značení: místo symbolu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ někdy používáme symbol $\partial_i f(a)$.

(2) Limita v definici

$$\begin{cases} \text{neexistuje}, \\ \text{existuje} \begin{cases} \in \mathbb{R} \text{ vlastní}, \\ \text{nevlastní} \begin{cases} \infty, \\ -\infty. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

(3) Pokud $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existuje, pak

$$\exists \delta > 0 : \left\{ a + te^i, |t| < \delta \right\} \subset \mathcal{D}(f).$$

(4) Početní technika. Nechť f je funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$. Parciální funkce je definována jako

$$g(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Fukce g je z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Platí

$$g'(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),$$

pokud má jedna strana smysl.

Příklad. Vezměme funkci $f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2}$. Spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2} x_2^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2} 2x_1 x_2.$$

Definice 96. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **totální diferenciál funkce f v bodě** a, jestliže platí

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Poznámka 71. Pro $n = 1$ máme

$$\frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{|h|} \to 0.$$

Tento výraz můžeme ekvivalentně přepsat jako

$$\frac{|f(a+h) - f(a) - Ah|}{|h|} \to 0.$$

Jinými slovy,

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{h} \right| \to 0.$$

Konečně
$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-A\right| \to 0.$$

Proto $A = f'(a)$.

Pro $n = 2$ máme
$$(x, y) \mapsto f(x, y).$$

Lineární zobrazení bude
$$(x, y) \mapsto f(a_1, a_2) + L(x - a_1, y - a_2).$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ máme zobrazení $x \mapsto f(x)$ a lineární zobrazení je
$$x \mapsto f(a) + L(x - a).$$

Pak
$$\frac{f(x)-f(a)-L(x-a)}{\|x-a\|}$$
nám po jednoduché substituci dává definiční výraz.

Poznámka 72. Podmínka z definice ohledně aproximace je ekvivalentní podmínce
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)-L(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Věta 131 (Vztah totálního diferenciálu a parciální derivace)**.** *Nechť L je totální diferenciál funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}^n$. Potom existují parciální derivace*
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$
a pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí
$$L(h_1, \dots, h_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$

Důkaz. Zobrazení L pišme ve tvaru
$$L(h_1, h_2, \dots, h_n) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n,$$
kde $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$. Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$. Zobrazení $\varphi(t) = te^i$ je spojité. Pak je
$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| = \|te^i - 0e^i\| = \|[0, \dots, 0, \underset{i-\text{tý}}{t}, 0 \dots, 0]\| = |t|.$$

Potom podle věty 130 platí

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\left(a+\varphi(t)-f(a)-L(\varphi(t))\right)}{\|\varphi(t)\|}=0,$$

podmínka (P) je splněna. Upravíme

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+te^i)-f(a)-A_i t}{|t|}=0.$$

Odsud dostáváme, že

$$\lim_{t\to 0} \left|\frac{f(a+te^i)-f(a)}{t}-A_i\right|=0,$$

a tedy

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+te^i)-f(a)}{t}=A_i.$$

Proto $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=A_i$. □

Poznámka 73. Z věty 131 plyne, že totální diferenciál je určen jednoznačně.

Označení. Totální diferenciál značíme $f'(a)$. Formálně je $f'(a)\in(\mathbb{R}^n)^*$.

Pozor na kolizi značení! Pro $n=1$ je

$$f'(a)\in\mathbb{R} \qquad\qquad f'(a)\in(\mathbb{R})^*:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

třeba rozlišovat mezi derivací a totálním diferenciálem.

Věta 132 (Totální diferenciál a spojitost)**.** *Má-li funkce f v bodě $a\in\mathbb{R}^n$ totální diferenciál, je f v bodě a spojitá.*

Důkaz. Stačí ukázat, že následující limita je rovna $f(a)$:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{\|x-a\|}\cdot\|x-a\|+f(a)+f'(a)(x-a)\right),$$

kde $f'(a)$ je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $h\mapsto f'(a)(h)$. Protože je $x\mapsto\|x-a\|$ vlastně

$$x\mapsto\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-a_i)^2},$$

je spojité. Konečně třetí člen je vlastně

$$x\mapsto x-a=[x_1-a_1,\dots,x_n-a_n],$$

a tedy je též spojité. Po substituci je

$$y \to f'(a)(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot y_i.$$

Máme tedy

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \cdot 0 + f(a) + f'(a)(\mathbf{o}) = f(a),$$

což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka 74.

(1) Existuje-li $f'(a)$, jiť jsme dokázali, že $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$ a také že f je v a spojité. Opačná implikace neplatí.

(2) Uvažujme

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \vee y = 0, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

ale f není spojitá v $(0,0)$.

Lemma 7 (Věta o střední hodnotě pro funkci více proměnných)**.** *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $I = (\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times (\alpha_n, \beta_n) \subset \mathbb{R}^n$, $a, b \in I$. Nechť v každém bodě I existují vlastní parciální derivace f podle všech proměnných. Potom existují body $\xi_1, \ldots, \xi_n \in I$ takové, že*

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi_i)(b_i - a_i).$$

Důkaz. Označme

$$\begin{aligned} p^0 &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) = a, \\ p^1 &= (b_1, a_2, \ldots, a_n), \\ p^2 &= (b_1, b_2, \ldots, a_n), \\ &\ldots \\ p^n &= (b_1, b_2, \ldots, b_n) = b. \end{aligned}$$

Potom platí

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \left(f(p^k) - f(p^{k-1}) \right).$$

Položme pro $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$g^k(x) = f(b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, a_n).$$

Potom má g^k v každém bodě (α_k, β_k) vlastní derivaci, takže existuje $z_k \in [a_k, b_k]$ splňující (Lagrangeova věta 50)

$$\underbrace{g^k(b_k) - g^k(a_k)}_{f(p^k)-f(p^{k-1})} = \underbrace{(g^k)'(z_k)(b_k - a_k)}_{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi^k)\cdot(b_k-a_k)}.$$

Položíme $\xi^k = [b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, z_k, a_{k+1}, \dots, a_n]$. □

Věta 133 (Postačující podmínka existence totálního diferenciálu)**.** *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

jsou spojité funkce v bodě a. Potom má f v bodě a totální diferenciál.

Důkaz. Máme funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a spolu s ní n-tici funkcí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &: B(\alpha_1, \beta_1) \to \mathbb{R}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &: B(\alpha_2, \beta_2) \to \mathbb{R}, \\ &\dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} &: B(\alpha_n, \beta_n) \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dále máme $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takové, že

$$L : k \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) k_i.$$

Ukážeme, že $L = f'(a)$, tj. pro L platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x - a\|} = 0.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\tilde{\delta} > 0$ takové, že

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \ \forall x \in B(a, \tilde{\delta}) : \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| < \varepsilon.$$

Položme $\delta = \frac{\tilde{\delta}}{\sqrt{n}}$. Pak

$$I = (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \cdots \times (a_n - \delta, a_n + \delta) \subset (a, \tilde{}\delta).$$

Zvolme $x \in B(a, \delta) \subseteq I \subseteq B(a, \tilde{\delta})$. Podle lemmatu 7 nalezneme body $\xi^i(x) \in I$, $i = 1, \dots, n$ takové, že

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^i(x))(x_i - a_i).$$

Pak máme

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(a) - L(x-a)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^i(x))(x_i - a_i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^i(x)) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right) \cdot (x_i - a_i) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^i(x)) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right|}_{<\varepsilon} \cdot \underbrace{|x_i - a_i|}_{\leq \|x-a\|} \\
&\leq n \cdot \varepsilon \cdot \|x - a\|.
\end{aligned}
$$

Odsud plyne, že

$$
\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x - a\|} = 0.
$$

$\square$

Věta 134 (Řetízkové pravidlo). *Nechť funkce $f_1, \dots, f_k$ z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ mají v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál a funkce g z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}$ má v bodě $b = (f_1(a), \dots, f_k(a))$ totální diferenciál. Definujme funkci $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ předpisem*

$$
h(x) = g(f_1(x), \dots, f_k(x)).
$$

Potom má h v bodě a totální diferenciál a pro $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$
\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial y_j}(b) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).
$$